xy 平面において，原点 O を中心とする半径 4 の円 C の内側を半径 1 の円 C' が内接しながら滑ることなく転がるとき ,円 C' 上の点 P が描く曲線を X とする。ただし，点 P のはじめの位置は点 $P_0(4,\ 0)$ とする。
円 C' の中心 O′ が原点O のまわりを θ だけ回転したときの点 P の座標を $(x,\ y)$ とするとき，次の問に答えよ。

(1) $\overrightarrow{OO'}$ の成分を θ を用いて表せ。
(2) x，y を θ を用いて表せ。
(3) 点 P における曲線 X の接線と x 軸，y 軸との交点をそれぞれ Q，R とするとき，線分 QR の 長さは一定であることを示せ。ただし，点 P は座標軸上の点ではないものとする。

＜ ’14 岐阜薬科大 ＞

【戦略】

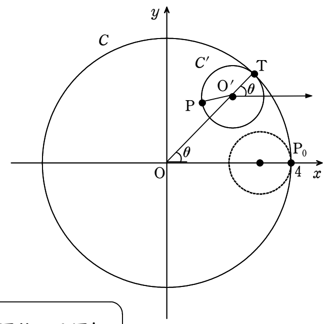
ハイポサイクロイドを扱った問題で，まずは P が描く曲線をパラメータ表示するところからスタートします。

ベクトルを繋いで点 P の座標を Get する一連の流れは必ずマスターしましょう。

定円から見た回転角 θ と，動円から見た回転角 ϕ との関係式を立てて，欲しいベクトルを考えて繋いでいきます。

(3) **の性質は有名な性質です。** 参考 **をご覧下さい。**

解答



(1) $\overrightarrow{OO'}=\begin{pmatrix}3\cos\theta\\3\sin\theta\end{pmatrix}$ … 答

(2) 図において

$\overset{\frown}{TP}=\overset{\frown}{TP_0}\ (=4\theta)$

反時計回りに θ 回転
&
時計回りに 4θ 回転

C' の半径は 1 なので，$\overrightarrow{O'P}=\begin{pmatrix}\cos(\theta-4\theta)\\\sin(\theta-4\theta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos3\theta\\-\sin3\theta\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'P}=\begin{pmatrix}3\cos\theta\\3\sin\theta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos3\theta\\-\sin3\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cos\theta+\cos3\theta\\3\sin\theta-\sin3\theta\end{pmatrix}$

３倍角の公式

ここで，$\cos3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ ， $\sin3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$ なので，

$$\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}4\cos^3\theta\\4\sin^3\theta\end{pmatrix}$$

ゆえに，$\begin{cases}x=4\cos^3\theta\\y=4\sin^3\theta\end{cases}$ … 答

(3) $\dfrac{dx}{d\theta}=12\cos^2\theta\,(-\sin\theta)=-12\sin\theta\cos^2\theta$ ， $\dfrac{dy}{d\theta}=12\sin^2\theta\cos\theta$

P は座標軸上にないので，$\sin\theta\neq0$，$\cos\theta\neq0$ で，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}}=\frac{12\sin^2\theta\cos\theta}{-12\sin\theta\cos^2\theta}=-\tan\theta$$

よって，X 上の点 P $(4\cos^3\theta,\ 4\sin^3\theta)$ における X の接線の式は

$y=-\tan\theta\,(x-4\cos^3\theta)+4\sin^3\theta$ で，これを整理すると

$$y=-(\tan\theta)x+4\sin\theta$$

よって，Q $(4\cos\theta,\ 0)$， R $(0,\ 4\sin\theta)$

これより，$QR=\sqrt{16\cos^2\theta+16\sin^2\theta}=4$ となり，線分 QR の長さは一定値 4 となる。

参考

円の内側を円が転がるとき，内側の円上の１点 P が描く軌跡を”ハイポサイクロイド”といいます。
※ 円の外側を転がるときは ”エピサイクロイド ”といいます。

P の軌跡を求めるために，P をパラメータ表示することになりますが，その際，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を成分表示することにより，P の座標を Get します。サイクロイド系の話題では皆同じシナリオです。

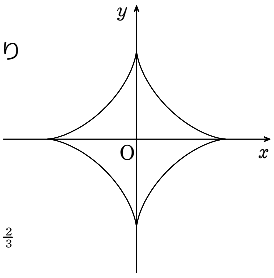
なお，ハイポサイクロイドのうち，外側の円と内側の円の半径の比率が 4 : 1 のときは”アステロイド”と呼ばれる特別な曲線となり，アステロイドは本問 (3) のような「接線が両軸によって切り取られる長さが一定」という性質をもちます。

アステロイドの概形は右図のようになり

$$\begin{cases} x = a\cos^3\theta \\ y = a\sin^3\theta \end{cases} \quad (a > 0)$$

というパラメータ表示となります。

ちなみに，陰関数表示は $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$
という形になります。



【総括】

背景的なものについてはいったんおいておきます。

本問を教科書的な観点で総括すると

「点 P の座標を Get して，パラメータ表示できるか」
「パラメータ表示された曲線の接線を扱えるか」

という問題になります。

その題材として，今回はハイポサイクロイドという有名曲線がネタにされています。（その他のパラメータ曲線も基本路線は同じ扱いです）

もっと細かく言うと，参考 で述べたように，ハイポサイクロイドの中でも特殊なものとしてアステロイドがあります。

有名曲線とその周辺知識を一つ一つのストーリーとして捉えて，焦らずに整理していってください。

その他の問題でも通用する部分と，この問題ならではの部分をきちんと整理しておくことが大切で，その他の問題でも通用する態度についてはきちんとマスターしておきましょう。