xy 平面において原点を中心とする半径１の円を A，点 $\left(1+\dfrac{1}{n}\,,\,0\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{n}$ の円を B とする。B が A の周上を反時計まわりに，滑らずに転がって，元の位置に戻るとき，はじめに点 $(1\,,\,0)$ にあった B 上の点 P の描く曲線を C とする。ただし n は自然数とする。曲線 C の長さを L_n とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}L_n$ を求めよ。

＜ ’ 89 東京工業大 ＞

【戦略】

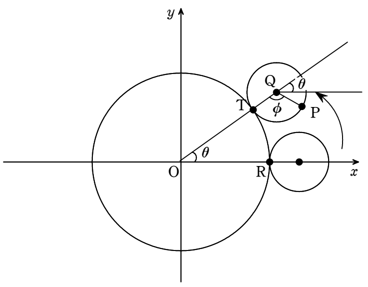
円の外側を円が転がる ” エピサイクロイド ” という有名曲線で，イメージで言うと，「ガムを踏んだタイヤが転がるときのガムの軌跡」です。

タイヤが転がるときに動くものは２つあります。

1 つはガム (点 P)，もう1 つは接点 (T と呼びます) です。

最初，この 2 つは一致しています。(R と呼びます)

タイヤが転がるにつれて，接点 T と，ガムの点 P は開いていきます。



図のような位置まで転がったとき，点 P の座標 $(x\,,\,y)$ を捉えたいわけですが，この x，y は図の θ (どれだけ転がったかを表す量) に依存していますから，

$$\begin{cases} x=\theta \text{ の式} \\ y=\theta \text{ の式} \end{cases}$$

のように，「パラメータ表示」します。

エピサイクロイドを特徴づける条件は $\overset{\frown}{\mathrm{TP}}=\overset{\frown}{\mathrm{TR}}$ であるということです。

これにより，$\dfrac{\phi}{n}=\theta$，すなわち $\phi=n\theta$ ですから，最終的には点 P の座標を θ のみで表せることになります。

点 P の座標 $(x\,,\,y)$ を捉えるということは $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を捉えることになります。

上の図の記号で言えば，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ とつなげばよいでしょう。

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ は，ともに「大きさ」と「回転量」で求まります。

今回はさらに弧長が問われていますから，パラメータ表示された曲線の弧長の求め方 (公式)

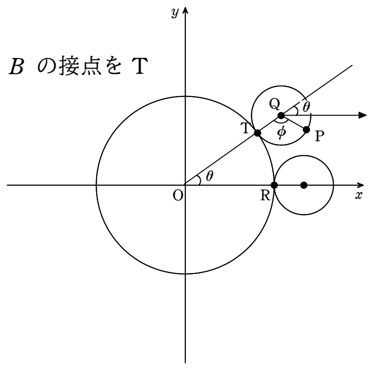
$$\int_{\bullet}^{\blacktriangle}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

についても再確認してください。

この積分計算において，途中絶対値の扱いが求められますが，経験に裏付けられた工夫を要します。(どういうことかは 解答 をご覧ください。)

解答

R$(1\,,\,0)$，円 B の中心を Q，円 A，B の接点を T
$\angle\mathrm{ROT}=\theta$，$\angle\mathrm{PQT}=\phi$ とする。



$\overset{\frown}{\mathrm{TP}}=\dfrac{1}{n}\cdot\phi$，$\overset{\frown}{\mathrm{TR}}=\theta$

$\overset{\frown}{\mathrm{TP}}=\overset{\frown}{\mathrm{TR}}$ なので，$\dfrac{\phi}{n}=\theta$，

すなわち $\phi=n\theta$

Q を通る x 軸に平行な直線を始線とし，反時計回りの向きを正の向きとする動径 QP の表す角は $\theta+\pi+\phi$，すなわち $(n+1)\theta+\pi$

ここで，

$$\cos(\,(n+1)\theta+\pi\,)=-\cos(n+1)\theta$$

$$\sin(\,(n+1)\theta+\pi\,)=-\sin(n+1)\theta$$

ゆえに $\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{n}\cos(n+1)\theta \\ -\dfrac{1}{n}\sin(n+1)\theta\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QP}}\\ &=\begin{pmatrix}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\cos\theta \\ \left(1+\dfrac{1}{n}\right)\sin\theta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{n}\cos(n+1)\theta \\ -\dfrac{1}{n}\sin(n+1)\theta\end{pmatrix}\end{aligned}$$

したがって，P$(x\,,\,y)$ としたとき，P の軌跡が表す曲線は

$$\begin{cases} x=\dfrac{n+1}{n}\cos\theta-\dfrac{1}{n}\cos(n+1)\theta \\ y=\dfrac{n+1}{n}\sin\theta-\dfrac{1}{n}\sin(n+1)\theta \end{cases}$$

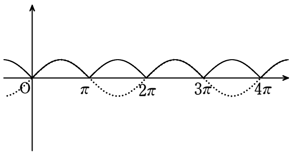
というパラメータ表示で表される。($0\leqq\theta\leqq2\pi$)

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\theta}&=-\frac{n+1}{n}\sin\theta+\frac{n+1}{n}\sin(n+1)\theta\\ &=\frac{n+1}{n}\{\,-\sin\theta+\sin(n+1)\theta\,\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\theta}&=\frac{n+1}{n}\cos\theta-\frac{n+1}{n}\cos(n+1)\theta\\ &=\frac{n+1}{n}\{\,\cos\theta-\cos(n+1)\theta\,\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2&=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\{\,2-2\cos(n+1)\theta\,\cos\theta-2\sin\theta\,\sin(n+1)\theta\,\}\\ &=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\{\,2-2\cos\{\,(n+1)\theta-\theta\,\}\,\}\quad(\because\ \text{加法定理})\\ &=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\{\,2-2\cos n\theta\,\}\\ &=2\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\{\,1-\cos n\theta\,\}\\ &=4\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\sin^2\frac{n\theta}{2}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
L_n &= \int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta \\
&= 2\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\int_0^{2\pi}\left|\ \sin\frac{n\theta}{2}\ \right|d\theta \\
&= \frac{2(n+1)}{n}\cdot\int_0^{n\pi}|\sin\alpha|\cdot\frac{2}{n}\,d\alpha \left(\frac{n\theta}{2}=\alpha \text{ と置換}\right) \\
&= \frac{4(n+1)}{n^2}\int_0^{n\pi}|\sin\alpha|\,d\alpha \\
&= \frac{4(n+1)}{n^2}\,n\int_0^{\pi}|\sin\alpha|\,d\alpha \text{（ sin の山 } n \text{ 個分の面積 ）} \\
&= \frac{4(n+1)}{n}\int_0^{\pi}\sin\alpha\, d\alpha \text{（ } \because 0\leqq\alpha\leqq\pi \text{ において } \sin\alpha\geqq 0 \text{ ）} \\
&= \frac{4(n+1)}{n}\Big[-\cos\alpha\Big]_0^{\pi} \\
&= \frac{8(n+1)}{n} \\
&= 8\left(1+\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}
$$



以上から $\lim_{n\to\infty}L_n=\lim_{n\to\infty}8\left(1+\frac{1}{n}\right)=8$ …答

【総括】

パラメータ表示をする部分はもちろん，今回は弧長が問われていることから弧長の式の扱いも，本問を通じて確認しましょう。

今回の積分計算については，すんなり処理できたという人がいれば，その人は手練れです。

角度がうっとうしいので，角度がシンプルになるように置換積分をしてやります。

その結果，積分区間にひずみが生まれますが，絶対値がついていることが逆に幸いとなります。

普通，絶対値は外したいものなのですが，絶対値がついていた方が都合がいいというケースもあるのだということを学んでください。
（絶対値がついていた方がいい分野としては「減衰曲線についての面積」などが有名です。）

ちなみに，本問は直感的には A の円周 2π に収束しそうですが，極限は直感が通用しない部分もあるので怖いところです。