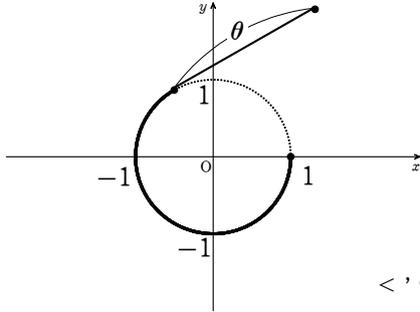


有名曲線【インヴォリュート】

長さが 2π の糸があり、原点を中心とする半径 1 の円に時計回りに一周巻き付いている。糸の始点、終点は $(1, 0)$ の位置にあるものとする。始点はそこに固定したまま、糸の終点を持ち、ピンと張ったまま図のようにほどこいていくとき、糸が円周から離れた部分の長さを θ とする。

このとき、次の問に答えよ。

- (1) 糸の終点と原点との距離、及び糸の終点の座標を θ で表せ。
- (2) $0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲で、糸の終点の x 座標が最大になる θ の値とそのときの糸の終点の座標を求めよ。



< '98 武蔵工業大 >

【戦略】

円の伸開線（インヴォリュート）と呼ばれる有名曲線です。サイクロイド系の話題と同じく、ベクトルを利用することで、パラメータ表示していきます。

【解答】

- (1) ほどけた糸の長さについての

等式を立てると $\widehat{AQ} = PQ = \theta$ なので、

$$\vec{OQ} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP} = \vec{OQ} + \vec{QP}$$

ここで、図1において

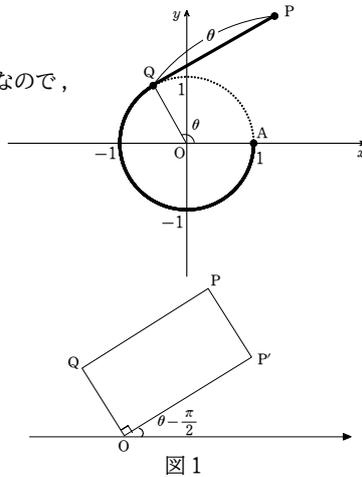


図1

$$\vec{QP} = \vec{OP'} = \begin{pmatrix} \theta \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \\ \theta \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \sin \theta \\ -\theta \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに、} \vec{OP} &= \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \theta \sin \theta \\ -\theta \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \theta \sin \theta + \cos \theta \\ -\theta \cos \theta + \sin \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

以上から、糸の終点 P の座標は

$$P(\theta \sin \theta + \cos \theta, -\theta \cos \theta + \sin \theta) \dots \text{答}$$

また、糸の終点と原点との距離は $|\vec{OP}|$ であり

$$\begin{aligned} |\vec{OP}|^2 &= (\theta \sin \theta + \cos \theta)^2 + (-\theta \cos \theta + \sin \theta)^2 \\ &= \theta^2 \sin^2 \theta + 2\theta \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta + \theta^2 \cos^2 \theta - 2\theta \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta \\ &= \theta^2 + 1 \end{aligned}$$

よって、糸の終点と原点との距離は $\sqrt{\theta^2 + 1}$ … 答

- (2) P の x 座標を $x(\theta)$ とする。

$x(\theta) = \theta \sin \theta + \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) であり、

$$\begin{aligned} x'(\theta) &= \sin \theta + \theta \cos \theta - \sin \theta \\ &= \theta \cos \theta \end{aligned}$$

θ	0	...	$\frac{\pi}{2}$...	π
$x'(\theta)$		+	0	-	
$x(\theta)$		↗	$\frac{\pi}{2}$	↘	

$\theta = \frac{\pi}{2}$ で $x(\theta)$, すなわち P の x 座標は最大となり、

そのときの P の座標は $(\frac{\pi}{2}, 1)$ … 答

【総括】

インヴォリュートという名前は無理に覚える必要は無いですが、相手を知ることが頭の整理のしやすさに繋がります。

その他の有名曲線の問題とともに見返すことによって、「同じような話題だな」という感想がもてるようになるまで、繰り返しやりこむことが大切です。