$I_n=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^n}\,dx$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1)　I_1，I_2 の値を求めよ。

(2)　$\lim_{n\to\infty}I_n$ の値を求めよ。

＜ '09 大分大 ＞

【戦略 1】

(1) についてはベタベタの計算です。

I_1 については $\log$ で一瞬ですし，I_2 については $x=\tan\theta$ $\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ という定番の置換です。

問題は (2) で，I_n という一般項が求まりません。

なので，「はさみうち」に照準をあわせますが，どうやって挟むかが問題です。

はさむにしても，ある程度あたりをつけないと，何をしていいのかが見えてきません。

本当は $\lim$ と $\int$ の順序を勝手に入れ替えてはならないので、あくまでこれは戦略の中の予想で，$\boxed{\text{解答}}$では触れません。

すごくざっくりした感覚でいうと

$0<x<1$ では，$\frac{1}{1+x^n}\to 1$ $(n\to\infty)$

$1<x<\sqrt{3}$ では，$\frac{1}{1+x^n}\to 0$ $(n\to\infty)$ なので

$\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^n}\,dx=\int_0^1\frac{1}{1+x^n}\,dx+\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^n}\,dx$ と積分区間を分けて考えるのが自然でしょうか。

そして，$J_n=\int_0^1\frac{1}{1+x^n}\,dx$，$K_n=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^n}\,dx$ とおくと

$\lim_{n\to\infty}J_n=1$，$\lim_{n\to\infty}K_n=0$ であることは見当がついたので，あとはそこに注力することになります。

K_n の方は話が楽で，積分区間 $1\leqq x\leqq\sqrt{3}$ において

$0\leqq\frac{1}{1+x^n}\leqq\frac{1}{x^n}$ ですから，$0<\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^n}\,dx<\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^n}\,dx$

$$\begin{aligned}\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^n}\,dx&=\left[-\frac{1}{n+1}x^{-n+1}\right]_1^{\sqrt{3}}\\&=-\frac{1}{n+1}\left\{\frac{1}{(\sqrt{3})^{n-1}}-1\right\}\to 0\ (n\to\infty)\end{aligned}$$

なので，はさみうちの原理から，$\lim_{n\to\infty}K_n=0$ であることが言えます。

問題は $\lim_{n\to\infty}J_n$ の方です。

$\frac{1}{1+x^n}\leqq\frac{1}{1+0}$ で，$J_n<\int_0^1dx=1$ と上からは簡単におさえられます。

問題は下からの評価です。

$\frac{1}{1+1}\leqq\frac{1}{1+x^n}$ としても，$\frac{1}{2}<J_n$ となり，はさみうち失敗です。

n を消してしまうと，失敗することが分かりました。

そこで積分区間 $0\leqq x\leqq 1$ において，$0\leqq x^n\leqq 1$ であることを利用して

$\frac{x^n}{1+x^n}\leqq\frac{1}{1+x^n}$，すなわち $\int_0^1\frac{x^n}{1+x^n}\,dx<J_n$ と n を残して評価すると

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{x^n}{1+x^n}\,dx&=\int_0^1\frac{1+x^n-1}{1+x^n}\,dx\\&=\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^n}\right)dx\\&=1-J_n\end{aligned}$$

ですから，$1-J_n<J_n$，すなわち $\frac{1}{2}<J_n$ となり結局失敗します。

「定積分と不等式」の分野の打開策として，「積分漸化式に絡める」というセオリーも頭をよぎりますが，積分漸化式の要である部分積分がうまくいきません。

無理やり部分積分をかますこともできますが，意味不明な形になって終了です。

ここまでくると八方ふさがりのように思えます。

何とかしてこの状況を打開しないといけません。

結局

$\frac{\boxed{}}{\boxed{}}\leqq\frac{1}{1+x^n}$ と下からおさえるにあたっては

$0\leqq x^n\leqq 1$ を用いて

①：分母を大きくする

②：分子を小さくする

という２択しかありません。

① の方針だと，$\frac{1}{1+1}$ となり，n が消えてしまい失敗しました。

② の方針だと，$\frac{x^n}{1+x^n}$ とすると先ほどのように失敗します。

大きくする側だと Max 1 なので，n は消えてしまいます。

そこで，選ぶとしたら②の方針でいきたいところです。

分子を小さくしようと思うと，$\frac{1-○}{1+x^n}$ と分子から何かを引けばいいわけです。

この ○ をどうすれば解決しそうでしょうか？

もちろん積分計算可能な形に持っていこうと思うと，分母が約分で消える形が望ましいでしょう。

そこで，$\frac{1-x^{2n}}{1+x^n}\leqq\frac{1}{1+x^n}$ という評価が思いつけばしめたものです。

これにより，$1-x^n\leqq\frac{1}{1+x^n}$，すなわち $\int_0^1(1-x^n)\,dx<J_n$ となり解決です。

【解答】

(1) $I_1=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x}dx=\Big[\log|1+x|\Big]_0^{\sqrt{3}}=\log(1+\sqrt{3})$ … 答

I_2 について，$x=\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$dx=\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$

x	$0\ \to\ \sqrt{3}$
θ	$0\ \to\ \frac{\pi}{3}$

$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{3}$ … 答

(2) $\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^n}\,dx=\int_0^1\frac{1}{1+x^n}\,dx+\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^n}\,dx$

$J_n=\int_0^1\frac{1}{1+x^n}\,dx$，　$K_n=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^n}\,dx$ とおく。

< K_n について>

$1\leqq x\leqq\sqrt{3}$ において，$0\leqq\frac{1}{1+x^n}\leqq\frac{1}{x^n}$

等号は常に成立しないので，$0<\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^n}\,dx<\int_1^{\sqrt{3}}x^{-n}\,dx$

$$\begin{aligned}\int_1^{\sqrt{3}}x^{-n}\,dx&=\left[-\frac{1}{n+1}\,x^{-n+1}\right]_1^{\sqrt{3}}\\&=-\frac{1}{n+1}\{(\sqrt{3})^{-n+1}-1\}\\&=-\frac{1}{n+1}\left\{\frac{1}{(\sqrt{3})^{n-1}}-1\right\}\to 0\ \ (n\to\infty)\end{aligned}$$

はさみうちの原理より，$\lim_{n\to\infty}K_n=0$

< J_n について>

$0\leqq x\leqq 1$ において，$0\leqq x^{2n}\leqq 1$ であり，$\frac{1-x^{2n}}{1+x^n}\leqq\frac{1}{1+x^n}\leqq\frac{1}{1+0}$

すなわち，$1-x^n\leqq\frac{1}{1+x^n}\leqq 1$

等号は常には成立しないので，$\int_0^1 1-x^n\,dx<\int_0^1\frac{1}{1+x^n}\,dx<1$

$$\begin{aligned}\int_0^1 1-x^n\,dx&=\left[x-\frac{1}{n+1}\,x^{n+1}\right]_0^1\\&=1-\frac{1}{n+1}\\&=\frac{n}{n+1}\end{aligned}$$

よって，$\frac{n}{n+1}<J_n<1$ が成立し，(最左辺) $\to 1$ なので，
はさみうちの原理から

$$\lim_{n\to\infty}J_n=1$$

$$\lim_{n\to\infty}I_n=\lim_{n\to\infty}(J_n+K_n)=1$$ … 答

【戦略 2】

コーシー・シュワルツの不等式 (積分 Ver)

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2\leqq\int_a^b(f(x))^2\,dx\int_a^b(g(x))^2\,dx$$

を用いれば一発 KO です。

正直思いつく必然性がありませんから，閃き一発系の解答です。

【解 2】部分的別解

コーシー・シュワルツの不等式から

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2\leqq\int_a^b(f(x))^2\,dx\int_a^b(g(x))^2\,dx$$

これにおいて，$a=0$，$b=1$，$f(x)=\sqrt{1+x^n}$，$g(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^n}}$ とすると

$\left(\int_0^1\sqrt{1+x^n}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^n}}\,dx\right)^2\leqq\int_0^1(1+x^n)\,dx\cdot\int_0^1\frac{1}{1+x^n}\,dx$ で，

$1\leqq\left[x+\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1\cdot J_n$，すなわち，$1\leqq\frac{n+2}{n+1}J_n$

これより，$\frac{n+1}{n+2}\leqq J_n$ を得る。

一方，積分区間 $0\leqq x\leqq 1$ において，$0\leqq x^n\leqq 1$ であるから，

$$\frac{1}{1+x^n}\leqq\frac{1}{1+0}$$

すなわち，$\int_0^1\frac{1}{1+x^n}\,dx<1$ で，$J_n<1$

以上から，$\frac{n+1}{n+2}\leqq J_n<1$ であり，(最左辺) $\to 1$ ($n\to\infty$)

はさみうちの原理から $\lim_{n\to\infty}J_n=1$

【戦略 3】

$0<a_n<1<b_n<\sqrt{3}$ となる a_n，b_n で

$$I_n=\int_0^{a_n}\frac{1}{1+x^n}\,dx+\int_{a_n}^{b_n}\frac{1}{1+x^n}\,dx+\int_{b_n}^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^n}\,dx$$

と分割すると，

第１項目は $\dfrac{1}{1+(a_n)^n}\leqq\displaystyle\int_0^{a_n}\frac{1}{1+x^n}\,dx\leqq a_n$

第３項目は $0<\displaystyle\int_{b_n}^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^n}\,dx\leqq\frac{\sqrt{3}-b_n}{1+(b_n)^n}$

と評価できますから，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=1,\ \lim_{n\to\infty}b_n=1,\ \lim_{n\to\infty}(a_n)^n=0,\ \lim_{n\to\infty}(b_n)^n=\infty$$

となる a_n，b_n を見つければ，第２項目は n が十分大きいとき，積分区間が潰れて 0 に近づくことが予見できます。

このような a_n，b_n の一例としては

$$a_n=1-\frac{1}{\sqrt{n}},\ b_n=1+\frac{1}{\sqrt{n}}$$

などがあります。

【解 3】(2) について

十分大きな n に対して，$0<1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}<1<1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}<\sqrt{3}$

$$I_n=\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}\frac{1}{1+x^n}\,dx+\int_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}\frac{1}{1+x^n}\,dx+\int_{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^n}\,dx$$

＜ $\displaystyle\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}\frac{1}{1+x^n}\,dx$ について＞

積分区間 $0\leqq x\leqq1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ において

$$\frac{1}{1+\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n}\leqq\frac{1}{1+x^n}\leqq1$$

ゆえに，$\displaystyle\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}\frac{1}{1+\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n}\,dx\leqq\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}\frac{1}{1+x^n}\,dx\leqq\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}dx$

$$\frac{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n}\leqq\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}\frac{1}{1+x^n}\,dx\leqq1-\frac{1}{\sqrt{n}}$$

(最左辺)$=\dfrac{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\left\{\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}\right\}^{\sqrt{n}}}\ \to\ \dfrac{1-0}{1+0}=1$

【注】

$$\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}\ \to\ \frac{1}{e}$$

(最右辺) $\to$ 1

はさみうちの原理から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}\frac{1}{1+x^n}\,dx=1$

＜ $\displaystyle\int_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}\frac{1}{1+x^n}\,dx$ について＞

積分区間 $1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\leqq x\leqq1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ において　$0<\dfrac{1}{1+x^n}\leqq1$

よって，$0<\displaystyle\int_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}\frac{1}{1+x^n}\,dx\leqq\int_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}dx$

すなわち，$0<\displaystyle\int_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}\frac{1}{1+x^n}\,dx\leqq\frac{2}{\sqrt{n}}$

(最右辺) $\to$ 0 より，はさみうちの原理から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}\frac{1}{1+x^n}\,dx=0$

＜ $\displaystyle\int_{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^n}\,dx$ について ＞

積分区間 $1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\leqq x\leqq\sqrt{3}$ において $0<\dfrac{1}{1+x^n}\leqq\dfrac{1}{1+\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n}$

よって，$0<\displaystyle\int_{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^n}\,dx\leqq\int_{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n}\,dx$

すなわち，$0<\displaystyle\int_{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^n}\,dx\leqq\frac{\sqrt{3}-\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{1+\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n}$

(最右辺)$=\dfrac{\sqrt{3}-\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{1+\left\{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}\right\}^{\sqrt{n}}}\ \to\ 0$

はさみうちの原理から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^n}\,dx=0$

以上から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n=1+0+0=1$ …【答】

【総括】

(2) がかなりの難問です。積分区間を，$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx+\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^n}\,dx$ と

分ける部分も，洞察力を要します。

$\boxed{} \leqq \dfrac{1}{1+x^n}$ と下からどのようにおさえるかが最大の山場であり，この手の問題で頼りになるセオリー（格言）は

・体の一部を定数化。

・積分漸化式に絡める。

という言葉ですが，どちらも中々うまくいきませんでした。

「はさみうち」というオチは見えるでしょうが，結局「どうやってはさむか」という問題にぶち当たります。

複数解法を示しましたが，いずれにせよ「手順的に解く」という態度では限界があり，どこかで発想力が要求される問題であったと思います。

<コーシーシュワルツの不等式>

$$\left(\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right)^2 \leqq \int_a^b (\,f(x)\,)^2\,dx \int_a^b (\,g(x)\,)^2\,dx \quad \cdots(*)$$

証明

任意の実数 t に対して $\displaystyle\int_a^b \{\,tf(x)-g(x)\,\}^2\,dx \geqq 0$ が成立する。

これより，$\displaystyle\left(\int_a^b f(x)^2\,dx\right)t^2-2\left(\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right)t+\left(\int_a^b g(x)^2\,dx\right) \geqq 0$ が任意の実数 t で成立する。

$\displaystyle\int_a^b f(x)^2\,dx=0$ とすると，$f(x)^2$ が恒等的に 0 ということになり，$(*)$ の成立は明らかであるから，$\displaystyle\int_a^b f(x)^2\,dx \fallingdotseq 0$ のときを考えればよく，このとき，$\displaystyle\int_a^b f(x)^2\,dx>0$ が成立する。

ゆえに $\displaystyle\left(\int_a^b f(x)^2\,dx\right)t^2-2\left(\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right)t+\left(\int_a^b g(x)^2\,dx\right)=0$

の判別式を D として $\dfrac{D}{4} \leqq 0$ が成立する。

このことから，$\displaystyle\left(\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right)^2-\left(\int_a^b f(x)^2\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)^2\,dx\right) \leqq 0$

すなわち $(*)$ が成立する。