自然数 n（$n>3$）について，関数 $f_n(x)$ が

$$f_n(x)=\frac{1}{1+x^2}-1+x^2-x^4+x^6-\cdots+(-1)^{n+1}x^{2n}$$

を満たしている。このとき，次の問に答えよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\int_0^1|f_n(x)|\,dx<\frac{1}{2n+3}$ が成り立つことを示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}\right\}=\frac{\pi}{4}$ であることを証明せよ。

＜ ’06 名古屋市立大 ＞

【戦略】

「定積分と不等式評価２【ライプニッツ級数】」では $\tan$ の積分漸化式を用いてライプニッツ級数を求めるという流れの問題をやりましたが，本問のように「$\tan$ の逆関数」（【総括】を参照）を用いてライプニッツ級数を求める問題も頻出です。（もちろん誘導付きで）

ほとんど同じ問題が ’00 早稲田大などで出題されています。（出典をあげていたらキリが無いぐらいです）

> n は自然数とする。
>
> $$Q_n(x)=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^nx^{2n}\ ,\quad R_n(x)=\frac{1}{1+x^2}-Q_n(x)$$
>
> とおくとき，次の問に答えよ。
>
> (1) $\displaystyle\left|\int_0^1R_n(x)\,dx\right|$ と $\dfrac{1}{2n+3}$ の大小を判定せよ。
>
> (2) 無限級数 $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots$ を求めよ。
>
> ＜ ’00 早稲田大 ＞

誘導の意味を考えて，どのように前の設問の結果を用いるのかを考えながらチャレンジしてみてください。
繰り返しやることで，一連の流れ，ストーリーをマスターしてください。

解答

(1) $x=\tan\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$$dx=\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta\ ,$$

x	$0\ \to\ 1$
θ	$0\ \to\ \dfrac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned}(\text{与式})&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot(1+\tan^2\theta)\,d\theta\quad\left(\because\ 1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}\right)\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\\&=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}\\&=\frac{\pi}{4}\ \cdots\text{答}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}f_n(x)&=\frac{1}{1+x^2}-1+x^2-x^4+x^6-\cdots+(-1)^{n+1}x^{2n}\\&=\frac{1}{1+x^2}-\{1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^nx^{2n}\}\\&=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1-(-x^2)}\\&=\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}\end{aligned}$$

（注：{ } **内は初項 1，公比 $-x^2$ の等比数列の和**）

$$\begin{aligned}\int_0^1|f_n(x)|\,dx&=\int_0^1\left|\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}\right|\\&=\int_0^1\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,dx\end{aligned}$$

積分区間 $0\leqq x\leqq1$ において，$1\leqq1+x^2\leqq2$ より，$\dfrac{1}{2}\leqq\dfrac{1}{1+x^2}\leqq1$ で

$$\frac{1}{2}x^{2n+2}\leqq\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\leqq x^{2n+2}$$

特に，右側の不等式 $\dfrac{x^{2n+2}}{1+x^2}\leqq x^{2n+2}$ において

等号は常に成立しないので，$\displaystyle\int_0^1\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,dx<\int_0^1x^{2n+2}\,dx$

ゆえに，$\displaystyle\int_0^1|f_n(x)|\,dx<\left[\frac{1}{2n+3}x^{2n+3}\right]_0^1$ であり，

$$\int_0^1|f_n(x)|\,dx<\frac{1}{2n+3}$$

を得る。

(3)　$\left|\int_0^1 f_n(x)\,dx\right| \leqq \int_0^1 |f_n(x)|\,dx < \dfrac{1}{2n+3}$

注　一般に $a<b$ に対して

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

が成立します。（積分の三角不等式と呼ばれます。）

【簡単なイメージ】

$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x)$ の符号が一定であれば等号が成立する。

$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x)$ の符号が入れ替わるとき，

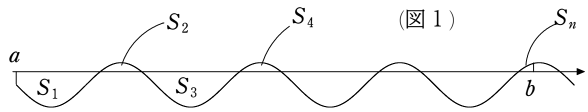
$f(a) \leqq 0$　**ならば** $\int_a^b f(x)\,dx = -S_1 + S_2 - S_3 + S_4 - \cdots + (-1)^m S_n$

$f(a) \geqq 0$　**ならば** $\int_a^b f(x)\,dx = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + \cdots + (-1)^m S_n$

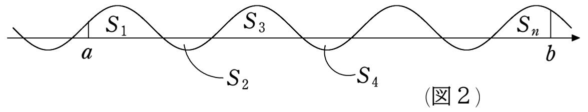
の形で表せる。（図１，図２**参照**）

（S_2，S_3，$\cdots$，S_{n-1} **は** $y=f(x)$ **と** x **軸で囲まれる部分の面積**）

（S_1，S_n **は 一般的には** $x=a$ **や** $x=b$ **によって少し区切れている部分の面積**）



（図１）



（図２）

いずれの場合においても，実数に関する三角不等式から

$$|X+Y| \leqq |X| + |Y|$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq |S_1| + |S_2| + |S_3| + |S_4| + \cdots + |S_n| = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

注　終わり

よって，$0 \leqq \left|\int_0^1 f_n(x)\,dx\right| < \dfrac{1}{2n+3}$ を得て，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+3} = 0$ なので，はさみうちの原理から

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_0^1 f_n(x)\,dx\right| = 0 \ \cdots (*)$$

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f_n(x)\,dx\right| &= \left|\int_0^1 \left\{\frac{1}{1+x^2} - (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots (-1)^n x^{2n})\right\} dx\right| \\ &= \left|\frac{\pi}{4} - \left[x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\right]_0^1\right| \\ &= \left|\frac{\pi}{4} - \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}\right)\right|\end{aligned}$$

$(*)$ から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\pi}{4} - \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}\right)\right| = 0$

したがって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}\right\} = \frac{\pi}{4}$ となる。

【総括】

tan がライプニッツ級数と深い関わりがあることは前回の「定積分と不等式２【ライプニッツ級数】」の問題や，本問を通じて実感したと思います。

ここで，tan の逆関数について少しお話ししておきます。（このこと自体は本問のテーマとは若干ズレているが，トップ校を目指すならば常識にしておくとよいでしょう）

例えば，$\displaystyle\int_\bullet^\blacktriangle \frac{1}{1+x^2}\,dx$ で $x=\tan\theta$ とおく置換は有名でしょうが，なぜこの置き換えでうまくいくのかというと，$y=\tan x \left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数 $\mathrm{Arctan}\,x$ について

$$(\mathrm{Arctan}\,x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

であることがバックボーンにあります。

このことに少し触れてある入試問題を紹介します。

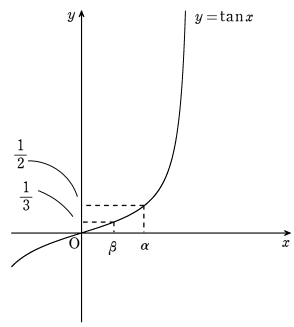
> $f(x) = \tan x \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$，　$f^{-1}(x) = \tan^{-1} x \quad (-\infty < x < \infty)$
> とする。
> (1)　$\tan^{-1}\dfrac{1}{2} + \tan^{-1}\dfrac{1}{3}$ の値を求めよ。
> (2)　導関数 $(\tan^{-1} x)'$ を求めよ。
> ＜ '14 防衛医科大　一部抜粋 ＞

解答

(1)　$\tan^{-1}\dfrac{1}{2} = \alpha$，$\tan^{-1}\dfrac{1}{3} = \beta$ とおく。

図より，$\tan\alpha = \dfrac{1}{2}$，$\tan\beta = \dfrac{1}{3}$ で $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$，$0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \\ &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} \\ &= 1\end{aligned}$$



$0 < \alpha + \beta < \pi$ より，$\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{4}$

ゆえに $\tan^{-1}\dfrac{1}{2} + \tan^{-1}\dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}$ …答

(2)　分かりやすくするため，$g(x) = f^{-1}(x)$ とおきなおす。

$y = \tan x$ の逆関数について，$x = \tan y$ …(⁎) を考える。

(⁎) の両辺を y で微分すると，$\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$

ゆえに (⁎) について $\dfrac{dy}{dx} = g'(x) = \dfrac{1}{\frac{dx}{dy}} = \dfrac{1}{x^2+1}$

したがって，$(\tan^{-1} x)' = \dfrac{1}{x^2+1}$ …答