$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n\theta\,d\theta$（$n=1,2,3,\cdots$）とするとき，次の問に答えよ。

(1)　I_1，および I_n+I_{n+2} ($n=1,2,3,\cdots$) を求めよ。

(2)　不等式 $I_n\geqq I_{n+1}$（$n=1,2,3,\cdots$）を示せ。

(3)　$\lim_{n\to\infty}nI_n$ を求めよ。

(4)　$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ を求めよ。

＜ '12 琉球大 改 ＞

【戦略】

ほとんどの積分漸化式は 部分積分によって作成するのですが，
$\int\tan^n x\,dx$ **に関する積分漸化式は例外です。**

本問の場合は I_n+I_{n+2} **を計算せよと言われていますから，手なりに計算すれば，引っかかる部分はないでしょうが(もちろんちゃんと計算ができるという前提の話ですよ)**

「I_{n+2} **を** n，I_n **を用いて表せ。」と言われたときの対応策**

「 $\tan$ **の積分漸化式は 2 乗を分離」**

という格言を覚えておいて下さい。

つまり，$I_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\tan^2 x\,dx$ **と見て，**

$$I_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{n+1}\tan^{n+1}x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-I_n$$

と見るのです。

(2) は積分区間を見ると，$0\leqq\tan\theta\leqq1$ **なので，かければかけるほど** $\tan\theta$ **は小さくなります。**

(3) は「積分漸化式に絡め」を意識すれば大丈夫です。

(4) は有名な級数で「ライプニッツ級数」と呼ばれます。

(1) の関係式 $I_n+I_{n+2}=\frac{1}{n+1}$ **の右辺で，**$\frac{1}{(\text{奇数})}$ **を作ってやることを考えていきます。**

$\boxed{\text{解答}}$

(1)　$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan\theta\,d\theta$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos\theta)'}{\cos\theta}\,d\theta$$
$$=-\Big[\log(\cos\theta)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=-\left\{\log\frac{1}{\sqrt{2}}-\log1\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\log2\ \cdots\text{答}$$

また，

$$I_n+I_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan\theta)^n\,d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan\theta)^{n+2}\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan\theta)^n(1+\tan^2\theta)\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan\theta)^n\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$$
$$=\left[\frac{1}{n+1}(\tan\theta)^{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\frac{1}{n+1}\ \cdots\text{答}$$

(2)　積分区間 $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ において，$0\leqq\tan\theta\leqq1$ だから，

$$0\leqq(\tan\theta)^{n+1}\leqq(\tan\theta)^n$$

よって，$0\leqq\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan\theta)^{n+1}\,d\theta\leqq\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan\theta)^n\,d\theta$ で，$0\leqq I_{n+1}\leqq I_n$ … ①

ゆえに，$I_n\geqq I_{n+1}$（$n=1,2,3,\cdots$）が成立する。

(3)　$0\leqq(\tan\theta)^{n+2}$ より，$0\leqq\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan\theta)^{n+2}\,d\theta$ で，$I_{n+2}\geqq0$

両辺 I_n を加えると，$I_n+I_{n+2}\geqq I_n$ なので，(1) より $\frac{1}{n+1}\geqq I_n$ … ②

①，② より，$0\leqq I_{n+1}\leqq I_n\leqq\frac{1}{n+1}$

$I_{n+2}\leqq I_n$なので，$I_n+I_{n+2}\leqq I_n+I_n$ であり，(1) から $\frac{1}{n+1}\leqq2I_n$，

すなわち $\frac{n}{2n+2}\leqq nI_n$ … ③

一方，$I_n+I_{n+2}\geqq I_{n+2}+I_{n+2}$ であり，(1) から $\frac{1}{n+1}\geqq2I_{n+2}$ で，

$$I_{n+2}\leqq\frac{1}{2n+2}$$

$n\to\infty$ のときを考えるので，$n\geqq2$ として考えてもよく，

$I_n\leqq\frac{1}{2(n-2)+2}=\frac{1}{2n-2}$ で，$nI_n\leqq\frac{n}{2n-2}$ …④

③，④ より，$\frac{n}{2n+2}\leqq nI_n\leqq\frac{n}{2n-2}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+2}=\frac{1}{2}$，$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-2}=\frac{1}{2}$ より，はさみうちの原理から

$$\lim_{n\to\infty}nI_n=\frac{1}{2}\ \cdots\text{答}$$

(4) $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\pi}{4}$ と定めると，$I_n+I_{n+2}=\frac{1}{n+1}$ は $n=0$ でも成り立つ。

$$I_0+I_2=\frac{1}{1}$$
$$-I_2-I_4=-\frac{1}{3}$$
$$I_4+I_6=\frac{1}{5}$$
$$-I_6-I_8=-\frac{1}{7}$$
$$\vdots$$
$$(-1)^n\ \{I_{2n}+I_{2n+2}\}=(-1)^n\frac{1}{2n+1}\quad (n=0,1,\cdots)$$

辺々加えると，

$$I_0+(-1)^n I_{2n+2}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}\ (=S_n\ \text{とおく})$$

ここで，$S_n-I_0=(-1)^n I_{2n+2}$，すなわち $\left|S_n-\frac{\pi}{4}\right|=|I_{2n+2}|=I_{2n+2}$

また，$0\leqq I_{n+1}\leqq I_n\leqq\frac{1}{n+1}$ 及びはさみうちの原理から $\lim_{n\to\infty}I_n=0$ なので，$\lim_{n\to\infty}I_{2n+2}=0$

したがって，$\lim_{n\to\infty}\left|S_n-\frac{\pi}{4}\right|=\lim_{n\to\infty}I_{2n+2}$
$=0$

これより，$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\pi}{4}$

以上から，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\pi}{4}$ … 答

【総括】

本問を通じて学んで欲しいことが２つあります。

１つは「 tan の積分漸化式の作り方」，及び「体の一部を定数化」という格言の大切さです。

今回の(2)は $0\leqq\tan\theta\leqq 1$ だからかければかけるほど小さくなると見ましたが，

$$\tan^{n+1}\theta=\tan^n\theta\cdot\tan\theta\leqq\tan^n\theta\cdot 1$$

と見れば，「体の一部を定数化」という見方とも言えるでしょう。

もう１つは「ライプニッツ級数の求め方」というこの問題の背景的な有名テーマの流れです。

ライプニッツ級数の倒し方にはもう一つ別の倒し方があるので，それは後の問題で扱います。

それらの問題を繰り返しやりこむことでこの話題を染み込ませて下さい。