n を自然数とし，$I_n=\int_0^1 x^n e^x\,dx$ とおく。

(1) I_n と I_{n+1} の間に成り立つ関係式を求めよ。

(2) すべての n に対して，不等式

$$\frac{e}{n+2}<I_n<\frac{e}{n+1}$$

が成り立つことを示せ。

(3) $\lim_{n\to\infty} n(nI_n-e)$ を求めよ。

＜ '01 大分医科大 ＞

【戦略】

「積分漸化式は部分積分によって作る」という基本事項を身につけていれば，(1) は困ることはないはずです。
（※ $\int \tan^n x\,dx$ についての積分漸化式は例外です。）
（これについては後々扱います）

(2) の不等式証明は経験がものを言います。

教科書では「定積分と不等式」というトピックスで載っていますが，この分野の不等式証明は独特で，経験がないとほぼ右往左往してしまうことになるでしょう。

まず，I_n が直接計算できませんから，引き算してうんぬんかんぬんということはできません。

この分野で不等式を繋いでいくために心においてほしいキーワードは
「体の一部を定数化」
という言葉です。

I_n が直接計算出来ない理由は被積分関数 $x^n e^x$ において，変数 x が積の形で 2 ヵ所にいることが大きな原因です。

そこで，一方が定数に成り下がれば，計算が可能になります。
（論より証拠で 解答 の流れを見て納得しましょう。）

どちらを定数化するかですが，示すべき不等式の中に n が残っていますから，n を含んでいない e^x の方を，積分区間 $0\leqq x\leqq 1$ を用いて $e^0\leqq e^x\leqq e^1$ と評価してやります。

この「体の一部を定数化」という技によって，右側の不等式が示されることになります。

左側の不等式については失敗していますが，構いません。(まずはこの態度が大切です。)

そこでもう一つ押さえておきたいキーワードは
「積分漸化式に絡め」
です。

(1) で作った漸化式をうまく活用することを考えて下さい。

この態度は (3) にも効いてきます。

解答

(1)
$$\begin{aligned}I_{n+1}&=\int_0^1 x^{n+1}(e^x)'\,dx\\&=\Big[e^x x^{n+1}\Big]_0^1-(n+1)\int_0^1 x^n e^x\,dx\\&=e-(n+1)I_n\end{aligned}$$

$\therefore\ I_{n+1}=e-(n+1)I_n$ …答

(2) 積分区間 $0\leqq x\leqq 1$ において，$e^0\leqq e^x\leqq e^1$ より，$x^n\leqq x^n e^x\leqq ex^n$

ゆえに

$$\int_0^1 x^n\,dx<\int_0^1 x^n e^x\,dx<\int_0^1 ex^n\,dx$$

となり，$\frac{1}{n+1}<I_n<\frac{e}{n+1}$ が成立する。

これにより $I_n<\frac{e}{n+1}$ が示された。

また，$I_{n+1}<\frac{e}{n+2}$ だから (1) より $e-(n+1)I_n<\frac{e}{n+2}$

これより，$I_n>\frac{e}{n+2}$ を得る。

以上から $\frac{e}{n+2}<I_n<\frac{e}{n+1}$ が成立する …終

ここに
nI_n-e がいます

(3) $I_{n+1}=e-(n+1)I_n$ より，$I_{n+1}=e-nI_n-I_n$ だから，

$$nI_n-e=-I_{n+1}-I_n$$

ゆえに，$n(nI_n-e)=-nI_{n+1}-nI_n$

(2) より，$\frac{e}{n+2}<I_n<\frac{e}{n+1}$ だから $\frac{n}{n+2}e<nI_n<\frac{n}{n+1}e$

$n\to\infty$ のとき，(最左辺) $\to e$，(最右辺) $\to e$ だから，

はさみうちの原理より $\lim_{n\to\infty} nI_n=e$

また，$\frac{e}{n+3}<I_{n+1}<\frac{e}{n+2}$ だから $\frac{n}{n+3}e<nI_{n+1}<\frac{n}{n+2}e$

$n\to\infty$ のとき，(最左辺) $\to e$，(最右辺) $\to e$ だから，

はさみうちの原理より $\lim_{n\to\infty} nI_{n+1}=e$

よって $\lim_{n\to\infty} n(nI_n-e)=\lim_{n\to\infty}(-nI_{n+1}-nI_n)=-e-e=-2e$ …答

【総括】

(1)，(2)，(3) いずれもこの分野の格言が身についていないと，あたふたした挙げ句，手も足も出ないと思います。

(3) は (1)，(2) ができた人からすると「あ～もうはさみうちするだけだわ」とホッとさせてくれるかと思いきや

$\dfrac{e}{n+2}<I_n<\dfrac{e}{n+1}$ から辺々 n 倍して $\dfrac{ne}{n+2}<nI_n<\dfrac{ne}{n+1}$

辺々 e を引いて $\dfrac{ne}{n+2}-e<nI_n-e<\dfrac{ne}{n+1}-e$

（すなわち $\dfrac{-2e}{n+2}<nI_n-e<\dfrac{-e}{n+1}$ ）

辺々 n をかけて $\dfrac{-2en}{n+2}<n\,(nI_n-e)<\dfrac{-en}{n+1}$

と，単純にはさみにいくと，(最左辺) $\to -2e$ ，(最右辺) $\to -e$

となり，見事に失敗します。

等式を繋いでいく作業は多くの人が苦労ないのですが，この「不等式を繋いでいく作業」（評価する）というのは慣れが必要で，聞いているだけでは決して身につかない感覚を含む内容です。

「積分漸化式の作成は部分積分」
「体の一部を定数化」
「積分漸化式に絡め」

という格言を心に刻み，あとは練習あるのみです。