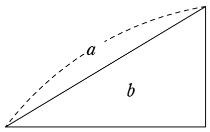
斜辺の長さが $a$，面積が $b$ である直角三角形が存在するとき，座標平面上の点 $(a，b)$ の存在範囲を図示せよ。

＜ ’11 群馬大 ＞

**【戦略 1】**

**直角三角形の状況は**




**という状況です。**

**残りの 2 辺の長さを設定することで，$\begin{cases}\text{三平方の定理}\\ \text{面積についての立式}\end{cases}$ という 2 つの式が立つことになります。**

**そこで，残りの 2 辺の長さを $s，t$ などと設定してやると** $\begin{cases}s^2+t^2=a^2\\ \dfrac{1}{2}st=b\end{cases}$

**という式が得られます。**

**ここから**

$\begin{cases}s^2+t^2=a^2\\ st=2b\end{cases}$ **という 2 式を満たす $s，t$（$s>0，t>0$）が存在するための $a，b$ についての条件を求める。**

**と話を進めていくことになります。**

$\begin{cases}s+t=\triangle\\ st=\square\end{cases}$ **として，解と係数の関係を用いてもよいですが，一工夫して**

$\begin{cases}s^2+t^2=a^2\\ s^2t^2=4b^2\end{cases}$ **として解と係数の関係を用いる方がごちゃごちゃせずに済むでしょう。**

【解 1】

題意から $a>0，b>0$ …①

直角をはさむ辺の長さを $s，t$（$s>0，t>0$）とする。

このとき $\begin{cases}s^2+t^2=a^2 &（\because\ \text{三平方の定理}）\\ \dfrac{1}{2}st=b &（\because\ \text{面積についての処理}）\end{cases}$

すなわち $\begin{cases}s^2+t^2=a^2\\ st=2b\end{cases}$ を満たす $s，t$ が $s>0，t>0$ の範囲に存在する。

この命題をさらに言い換えると

$\begin{cases}s^2+t^2=a^2\\ s^2t^2=4b^2\end{cases}$ を満たすを満たす $s^2(>0)，t^2(>0)$ が存在する。

この命題が真となるような $a，b$ についての条件を求めればよい。

解と係数の関係から $s^2，t^2$ は

$$X^2-a^2X+4b^2=0$$

の 2 解である。

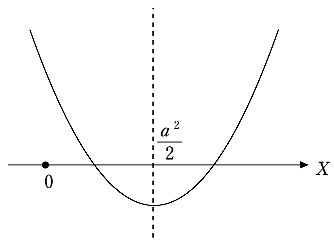
$f(X)=X^2-a^2X+4b^2$ とおくと，2 次方程式 $f(X)=0$ が $X>0$ の範囲に重解も含めて 2 つの実数解をもつための $a，b$ の条件を求めればよい。

$f(X)=\left(X-\dfrac{a^2}{2}\right)^2-\dfrac{a^4}{4}+4b^2$

軸の条件から $\dfrac{a^2}{2}>0$

すなわち $a^2>0$

① よりこれは成立




$f\left(\dfrac{a^2}{2}\right)\leqq 0$ より $-\dfrac{a^4}{4}+4b^2\leqq 0$

これを整理すると $(4b+a^2)(4b-a^2)\leqq 0$

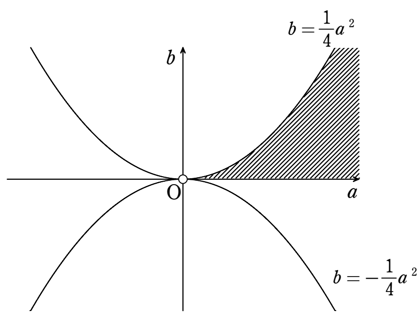
① より，$4b+a^2>0$ であるから，$4b-a^2\leqq 0$，すなわち $b\leqq\dfrac{1}{4}a^2$ …②

$f(0)>0$ より $4b^2>0$， すなわち $b^2>0$

① よりこれは成立

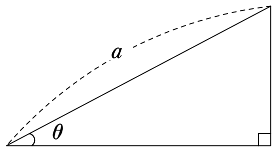
以上から ①，② を満たす $(a，b)$ の存在領域を $ab$ 平面に図示すると以下のようになる。

（境界線は $b=\dfrac{1}{4}a^2$ は含むが $a$ 軸，及び $(0，0)$ は除く）



**【戦略 2】**

**変数の設定として，先ほどは $s$，$t$ という「長さ」の変数を導入しましたが今度は「角度」を変数にとってみます。**




**図のように角度 $\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を設定します。**

**すると，残る２辺の長さは $a\sin\theta$，$a\cos\theta$ ですから，面積 $b$ との関係として**

$b=\dfrac{1}{2}\cdot(a\cos\theta)\cdot(a\sin\theta)$，**すなわち** $b=\dfrac{a^2}{4}\sin 2\theta$ **を得ます。**

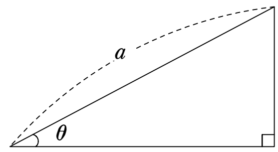
**下手くそな $a$，$b$ だとこの直角三角形が存在しないわけです。**

**直角三角形が存在しないということは $\theta$ が存在しないということに他なりません。**

**そこで，$\sin 2\theta=\dfrac{4b}{a^2}$ と見てやって，これを満たす $\theta$ が存在すればよいと言えばよいでしょう。**

【解 2】

題意より $a>0$，$b>0$ である。




右図のように，角度 $\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ をとる。

すると，この直角三角形の残りの辺の長さは $a\sin\theta$，$a\cos\theta$ であるため，

$b=\dfrac{1}{2}\cdot(a\cos\theta)\cdot(a\sin\theta)$ で，これを整理すると $\sin 2\theta=\dfrac{4b}{a^2}$ を得る。

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$0<2\theta<\pi$ だから $0<\sin 2\theta\leqq 1$

ゆえに $0<\dfrac{4b}{a^2}\leqq 1$ で $a^2>0$ だから $0<4b\leqq a^2$ … ① が成立する。

$a>0$，$b>0$ より，① の左側の不等号は必ず成立する。

一方，$4b\leqq a^2$ より，$b\leqq\dfrac{a^2}{4}$

よって，題意の直角三角形が存在するような $(a，b)$ の存在領域は

不等式 $a>0$，$b>0$，$b\leqq\dfrac{a^2}{4}$ で与えられる領域

（ただし，境界線は $b=\dfrac{1}{4}a^2$ は含むが $a$ 軸，及び $(0，0)$ は除く）

（以下図示は【解 1】と同じ）

【総括】

「下手くそな $a$，$b$ だと直角三角形が存在しない」

→ ”ウマイ” $a$，$b$ じゃなきゃダメ

この気持ちが 「～～ を満たす $s$，$t$ が存在する」という翻訳に導いてくれるはずです。

【戦略】でも述べましたが，$\begin{cases} s+t=\triangle \\ st=\square \end{cases}$ としようとすると，

$(s+t)^2=s^2+t^2+2st$ として処理するため，$s+t=\sqrt{\quad\quad}$ という形となることが目に見え，少し億劫です。

そこで，$s^2+t^2$（和）の方はそのままにしておき $s^2t^2$（積）の方を合わせにいくという発想で進めるのがよいでしょう。

また，そもそも 解答 では，さらりと $s$，$t$ と文字を設定しましたが，このように自分で文字を導入するということを厭わないでください。

レベルが高くなってくると，どのように文字を設定するかによって労力が変わってくることも多々あります。（今回は角度 $\theta$ を設定する方が楽でした。）

何を変数にとるのが効果的かということは常日頃から意識しておくとよいでしょう。