xyz 空間において，平面 $z=0$ 上の原点を中心とする半径 2 の円を底面とし，点$(0,0,1)$ を頂点とする円錐を A とする。次に，平面 $z=0$ 上の点 $(1,0,0)$ を中心とする半径 1 の円を H，平面 $z=1$ 上の点 $(1,0,1)$ を中心とする半径 1 の円を K とする。H と K を 2 つの底面とする円柱を B とする。
また，円錐 A と円柱 B の共通部分を C とする。
$0 \leqq t \leqq 1$ を満たす実数 t に対し，平面 $z=t$ による C の切り口の面積を $S(t)$ とおく。

(1) $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とする．$t=1-\cos\theta$ のとき，$S(t)$ を θ を用いて表せ。

(2) C の体積を求めよ。

＜ '03 東京大 ＞

【戦略】

円錐 A，円柱 B の共通部分を目を凝らして見てもよく分からないでしょう。

よく分からないときは式に教えてもらうことを考え，題意の立体を連立不等式で表すことにします。

円柱 B の表す不等式はすぐに分かるでしょうが，円錐面の方程式は経験が必要だと思います。円錐を含む「回転曲面」の方程式の立て方はマスターしましょう。

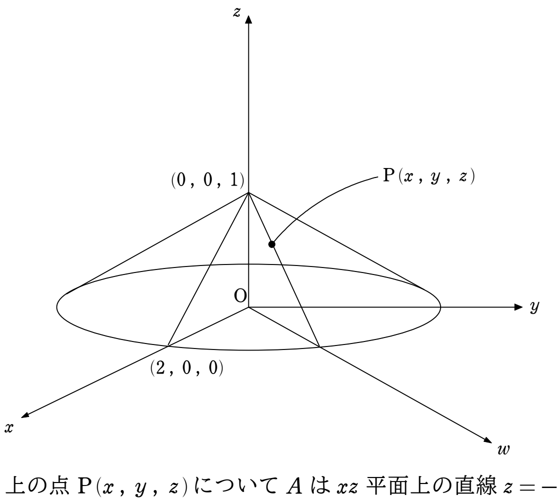
ポイントは「回す前と同じに見える」ということです。
(**※ 今回は** $[$**タテ**$]=-\dfrac{1}{2}($**ヨコ**$)+1$)

また，本問最大のポイントですが，$V=\displaystyle\int S\,d\theta$ ではありません。

" あなたが最後に書く式は，切った時点で決まってる "

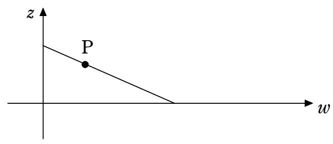
$z=t$ で切ったのなら，途中どんな文字が出てこようとも $V=\displaystyle\int S(t)\,dt$ です。

解答



円錐 A 上の点 $P(x, y, z)$ について A は xz 平面上の直線 $z=-\dfrac{1}{2}x+1$ を z 軸の周りに 1 回転してできる円錐である。

上図のように w 軸をとると



点 P は wz 平面における直線 $z=-\dfrac{1}{2}w+1$ 上の点で，$P(x, y, z)$ のとき

$w=\sqrt{x^2+y^2}$ なので，$z=-\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)+1$ を満たす。

整理すると，$x^2+y^2=4(1-z)^2$ であり，円錐の側面 A 上の点 (x, y, z) がこの関係式を満たすことから，これが円錐の側面 A を表す方程式である。

また円柱 B は連立不等式 $\begin{cases}(x-1)^2+y^2 \leqq 1\\ 0 \leqq z \leqq 1\end{cases}$ で表される。

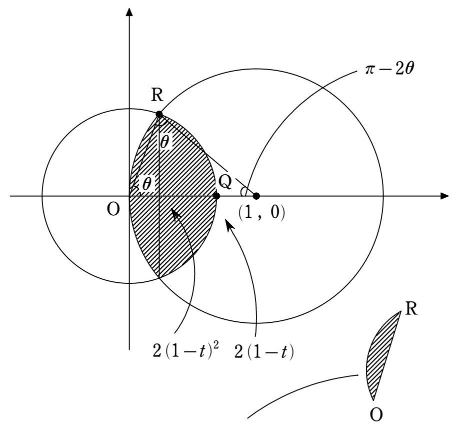
ゆえに，円錐 A と円柱 B の共通部分 C は，連立不等式

$$\begin{cases}x^2+y^2 \leqq 4(1-z)^2\\ (x-1)^2+y^2 \leqq 1\\ 0 \leqq z \leqq 1\end{cases}$$

で表される立体である。

C を $z=t\,(0 \leqq t \leqq 1)$ で切ったときの切り口は $\begin{cases}x^2+y^2 \leqq 4(1-t)^2\\ (x-1)^2+y^2 \leqq 1\end{cases}$ で与えられる。

$t=1-\cos\theta$ のとき，$\cos\theta=1-t$ より，C を $z=t$ で切った切り口は次の図のようになる。



$S(t)=\{($ 扇形 OQR の面積 $)+($ 弓形 OR の面積$)\}\times 2$

$($ 扇形 OQR の面積 $)=\dfrac{1}{2}\{2(1-\mathrm{t})\}^2\theta$

$($ 弓形 OR の面積 $)=\dfrac{1}{2}\cdot 1^2\cdot(\pi-2\theta)-\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin(\pi-2\theta)$

これらを $S(t)$ の式に代入して整理すると

$$S(t)=4\theta\cos^2\theta+\pi-2\theta-\sin 2\theta \ \cdots \text{答}$$

(2) C の体積を V とする。

$$V=\int_0^1 S(t)\,dt$$

$t=1-\cos\theta$ より，$dt=\sin\theta\,d\theta$，

t	$0 \to 1$
θ	$0 \to \frac{\pi}{2}$

$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}} S(t)\,\frac{dt}{d\theta}d\theta$ なので，

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4\theta\cos^2\theta+\pi-2\theta-\sin 2\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\,4\theta\cos^2\theta\sin\theta+\pi\sin\theta-2\theta\sin\theta-2\cos\theta\sin^2\theta\,)\,d\theta$$

ここで

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\cos^2\theta\,\sin\theta\,d\theta&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\left(-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right)'d\theta\\&=\left[-\frac{1}{3}\theta\cos^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{3}\cos^3\theta\,d\theta\\&=0+\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)\cos\theta\,d\theta\\&=\frac{1}{3}\left[\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\frac{2}{9}\end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta=\Big[-\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\sin\theta\,d\theta&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta(-\cos\theta)'\,d\theta\\&=\Big[-\theta\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos\theta)\,d\theta\\&=0+\Big[\sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=1\end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,\cos\theta\,d\theta=\left[\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{3}$$

以上から，

$$\begin{aligned}V&=\left(4\times\frac{2}{9}\right)+(\pi\times 1)-(2\times 1)-\left(2\times\frac{1}{3}\right)\\&=\pi-\frac{16}{9}\cdots\text{答}\end{aligned}$$

【総括】

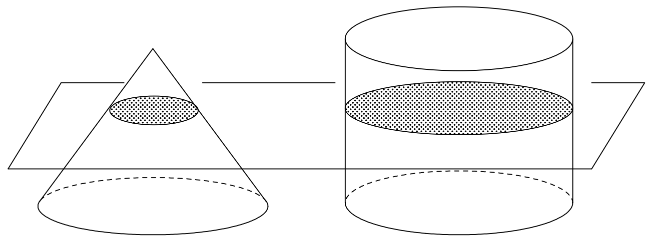
目を凝らしてもよくわからないときは式に教えてもらいます。

全体像については解いた後ですらよく分かりませんから，解く前から悩む意味はありません。

また，$t=1-\cos\theta$ という置き方については正直余計なお世話で，$\angle\mathrm{ROQ}=\theta$ とおいて，t と θ の関係を見出していくことは自分でやりますし，下手に言われると「どこが θ だ？」と探すことになり面倒でした。

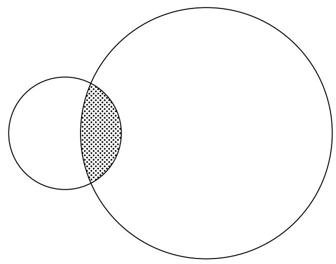
また，先にガッチャンコしてしまうと訳が分からなくなってしまいます。

順番を変えて，切ってからガッチャンコすると



これらをガッチャンコ

容易に



という今回の断面が想像できます。

順番を変えるだけで見え方が変わってくるとは人間の目は不思議ですね。