# 円の垂足曲線

Oを原点とする座標平面において，点Aの座標を$(2,0)$とする。線分OAを直径とする円周上の点Tにおける接線にOから下ろした垂線をOPとする。Tが円周上を1周動くとき，Pが動く距離を求めよ。

＜ '05 岡山大 改 ＞

**【戦略】**

**Tの回転運動に伴って動く点Pを捉えるためには，回転量のパラメータ$\theta$を導入し，点Pをパラメータ表示すればよいでしょう。**

**原点中心の円ではなく，$(1,0)$が中心の円なので注意しましょう。**

$C(1,0)$ **としたとき，**$\overrightarrow{CT} /\!/ \overrightarrow{OP}$ **であることから**

$$\overrightarrow{OP}=\bigcirc\,\overrightarrow{CT}=\bigcirc\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$$

**と表せます。**

$|\overrightarrow{CT}|=1$ **であることを考えると，**$|\overrightarrow{OP}|$ **さえ分かれば**

$$\overrightarrow{OP}=|\overrightarrow{OP}|\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$$

**となります。**

**Tにおける接線の式は，円の接線公式からGetできますから，**$|\overrightarrow{OP}|$ **については点と直線の距離公式から得られます。**

**パラメータ表示ができた後は曲線の長さを処理することになります。**

$\begin{cases}x=f(\theta)\\ y=g(\theta)\end{cases}$ $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ **というパラメータ表示で与えられる曲線の長さ$L$は**

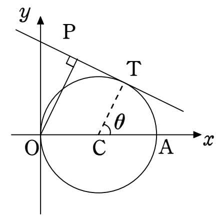
$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

**で求められるので，あとは積分計算です。**

**ただ，今回は$x$軸についての上下対称性がありますから，$0\leqq\theta\leqq\pi$の範囲で動かしたときの長さの2倍として求めることにします。**

解答

$C(1,0)$とする。




反時計回りを正の向きとして
$\overrightarrow{CA}$を$\theta$[rad]回転させて
$\overrightarrow{CT}$になったとすると

$\overrightarrow{CT}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$ $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ と表せる。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OT}&=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CT}\\ &=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}1+\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって，Tの座標は$(1+\cos\theta,\ \sin\theta)$ である。

また，線分OAを直径とする円の方程式は $(x-1)^2+y^2=1$

点Tにおける接線を$\ell$ とすると，$\ell$ の式は

$\{(1+\cos\theta)-1\}(x-1)+(\sin\theta)y=1$ で，これを整理すると

$$(\cos\theta)x+(\sin\theta)y-\cos\theta-1=0$$

$OP=d$ とすると，点と直線の距離公式から

$$\begin{aligned}d&=\frac{|-\cos\theta-1|}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}\\ &=|1+\cos\theta|\\ &=1+\cos\theta\ (\because\ -1\leqq\cos\theta\leqq 1\ より，1+\cos\theta\geqq 0\ )\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{CT}|=1$，$\overrightarrow{OP} /\!/ \overrightarrow{CT}$ であることに注意すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=d\,\overrightarrow{CT}\\ &=(1+\cos\theta)\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\cos\theta+\cos^2\theta\\ \sin\theta+\sin\theta\cos\theta\end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{cases}x=\cos\theta+\cos^2\theta\\ y=\sin\theta+\sin\theta\cos\theta\end{cases}$$

というパラメータ表示によって与えられる曲線が，点Pの軌跡が表す曲線である。

求める曲線の長さを$L$とする。

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\theta}&=-\sin\theta+2\cos\theta(-\sin\theta)\\ &=-\sin\theta-\sin 2\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\theta}&=\cos\theta+\cos\theta\cos\theta+\sin\theta(-\sin\theta)\\ &=\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta\\ &=\cos\theta+\cos 2\theta\end{aligned}$$

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=\sin^2\theta+2\sin 2\theta\sin\theta+\sin^2 2\theta$$
$$+\cos^2\theta+2\cos 2\theta\cos\theta+\cos^2 2\theta$$
$$=2+2(\cos 2\theta\cos\theta+\sin 2\theta\sin\theta)$$
$$=2+2\cos(2\theta-\theta)$$
$$=2(1+\cos\theta)$$
$$=2\cdot 2\cos^2\frac{\theta}{2}$$
$$=4\cos^2\frac{\theta}{2}$$

**後に $\sqrt{\quad}$ をかぶせることを考えて半角の公式を次数を上げるように使います。**

よって

$$L=2\int_0^{\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta \quad (\because\ x\text{ 軸に関する対称性})$$
$$=2\int_0^{\pi}\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta$$
$$=4\int_0^{\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta$$
$$=4\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta \quad \left(\because\ 0\leqq\frac{\theta}{2}\leqq\frac{\pi}{2}\text{ より，}\cos\frac{\theta}{2}\geqq 0\right)$$
$$=4\left[2\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi}$$
$$=8 \quad \cdots\text{答}$$

**対称性を用いたおかげで絶対値を外すことができます。**

【総括】

曲線上の動点 T における接線に，定点から下ろした垂線の足の軌跡を「垂足曲線」といいます。

今回は円の垂足曲線を扱ったというわけです。

一般的に垂足曲線は，$y=f(x)$ のように表示すると複雑になりますから，パラメータ表示を用いて表現します。

ベクトルを用いてパラメータ表示する方法は，本問を通じて学んでほしいことの１つです。

また，曲線の長さを求める式の立式や，その後の積分計算など，必要な基本事項は多岐にわたります。

しっかりとマスターしてください。

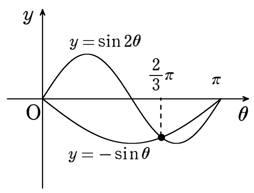
<cf>　～ 円の垂足曲線はカージオイド ～

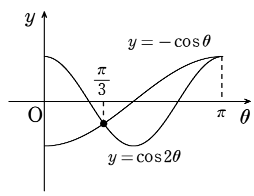
本問は点 P の軌跡が表す曲線を図示するところまでは求められませんでしたが，少し踏み込んで図示してみることにします。

$0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲で考えて，あとは $x$ 軸に関する上下の対称性に気を付けて図示すれば十分です。

本問の計算結果を拝借すると

$$\frac{dx}{d\theta}=(-\sin\theta)-\sin 2\theta \qquad \frac{dy}{d\theta}=\cos 2\theta-(-\cos\theta)$$

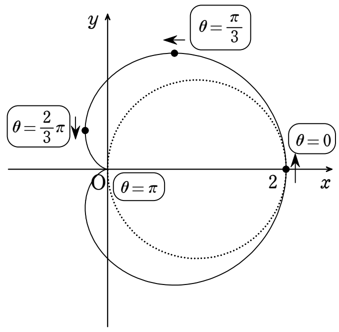



グラフの上下で，$\dfrac{dx}{d\theta}$，$\dfrac{dy}{d\theta}$ の符号を判定しながら，増減表をかくと

| $\theta$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\cdots$ | $\frac{2}{3}\pi$ | $\cdots$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{dx}{d\theta}$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ |
| $x$ | $\cdot$ | $\leftarrow$ | $\leftarrow$ | $\leftarrow$ | $\cdot$ | $\rightarrow$ | $\cdot$ |
| $\frac{dy}{d\theta}$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ |
| $y$ | $\uparrow$ | $\uparrow$ | $\cdot$ | $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\cdot$ |
| $\left(\frac{dx}{d\theta},\frac{dy}{d\theta}\right)$ | $\uparrow$ | $\nwarrow$ | $\leftarrow$ | $\swarrow$ | $\downarrow$ | $\searrow$ | |
| $(x, y)$ | $(2, 0)$ | | $\left(\frac{3}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ | | $\left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ | | $(0, 0)$ |

$x$ 軸についての対称性に気を付けて図示すると




これは「カージオイド」と呼ばれる有名曲線の１つです。

ちなみに，$\angle ACT=\angle AOP=\theta$ なので，本問で導出した
$$\begin{cases} x=\cos\theta+\cos^2\theta \\ y=\sin\theta+\sin\theta\cos\theta \end{cases}$$
で用いられている $\theta$ は，そのまま極方程式における偏角 (argument) を表すものとして考えてもかまいません。

O を原点かつ極，$x$ 軸正の向きを始線としたとき，
直交座標 $(x, y)$ と極座標 $(r, \theta)$ の間に成り立つ $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ という関係式から

$$r=1+\cos\theta$$

という極方程式を得ます。
（一般にカージオイドの極方程式は $r=a(1+\cos\theta)$ です。）

ちなみに，円 $C$ の外側をもう一方の円 $C'$ が滑らずに転がっていく状況を考えたとき，最初の位置で接している接点の軌跡を「エピサイクロイド」といい，$C$，$C'$ の半径が同じときのエピサイクロイドはカージオイドと一致します。

【（ぼやき）】

ちなみに本問の原文は以下のようでした。

　O を原点とする座標平面において，点 A の座標を $(2,\ 0)$ とする。
線分 OA を直径とする円周上の点 T における接線に O から下ろした垂線を OP とする。T が円周上を動くとき，P が描く曲線の長さを求めよ。

何が違うかお判りでしょうか。

「T が円周上を『1 周』動くとき，P が『動く距離』を求めよ」

という部分です。

原文では「T が円周上を動くとき」としか書いていません。

したがって，T がグルグル動けば，P もグルグル動くことになります。

例えば，もう少し簡単な例で考えてみます。

$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ で $\theta$ が動くとき，$\mathrm{P}(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$ の軌跡の長さ $L$（敢えてこういう曖昧な表現にしておきます）について考えてみます。

これを公式 $\displaystyle\int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$ で計算すると

$$
\begin{aligned}
L&=\int_0^{2\pi}\sqrt{(-2\sin 2\theta)^2+(2\cos 2\theta)^2}\,d\theta\\
&=\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2 2\theta+4\cos^2 2\theta}\,d\theta\\
&=4\pi
\end{aligned}
$$

となります。

$0 \leqq 2\theta \leqq 4\pi$ より，点 P が半径 1（周の長さ $2\pi$）の円上を 2 周回っているからです。

本来 ”普通に” 考えるべき曲線の長さは $2\pi$ だと思いますから，ここに齟齬が生まれてしまうわけです。

つまり，例の公式 $\displaystyle L=\int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$ で計算した $L$ は曲線の長さではなく，点 P が「動いた道のり(距離)」です。

同じところを重なって動かないという前提で 「道のり」＝「曲線の長さ」ということが言えます。