三角形 ABC において，

$$a=\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\ ,\ b=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}\ ,\ c=\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}$$

とおく。このとき次の問いに答えよ。

(1) $abc=0$ のとき，三角形 ABC はどのような三角形となるか。

(2) $(a-b)(b-c)(c-a)=0$ のとき，三角形 ABC はどのような三角形となるか。

(3) 三角形 ABC の面積は $\dfrac{1}{2}\sqrt{ab+bc+ca}$ であることを証明せよ。

＜'85 東北大＞

【戦略】

(1)，(2) は三角形の形状決定問題です。今回与えられている a，b，c という内積の値は巡回性はもっていて規則性がありそうですが，始点が揃っていないので，そこから何かを見出そうと思ったら，我々が情報をパッと読み取れる形に適切に変形する必要があります。

(1) は a については始点を A に，b については始点を B に，c については始点を C に揃えて考えます。
例えば，$a=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と始点を揃えてみます。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ というのは $\angle A$ に影響を与える値だからです。

そう考えると，a，b，c の内積の値というのはそれぞれ $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ に影響する値であることが分かりますから，それが 0 ということは直角三角形であるという判断に繋がるでしょう。

(2) は $a=b$ または $b=c$ または $c=a$ という条件です。

先ほど同様 a，b，c がそれぞれ $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ に影響を与える値であることを鑑みると，今度は二等辺三角形であることが予想されます。

ただ，内積が等しいからといって，角度が等しいとはできません。内積は角度だけでなく大きさにも影響を受ける値だからです。

しかし，この予想のもとで，
今ある条件からどのような式がたつのか
二等辺三角形だとしたら何が成り立っていればよいのか
を考えて行くと，この両者がリンクしてきます。

(3) は一応証明問題の形式ですが，実質的には
$\triangle$ABC の面積を a，b，c を用いて表せ。
ということでしょう。

当然，ベクトルの面積公式 $\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$ から攻め落とします。
そのために，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2$，$(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2$ を準備していきます。

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2$ を式変形して a，b，c を登場させる
a，b，c を式変形して $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2$ を登場させる

という 2 路線考えられると思います。ここでは前者で考えてみたいと思います。

解答

(1) $abc=0$ のとき，$a=0$ または $b=0$ または $c=0$

$a=0$，すなわち $\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ のとき

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ なので，$\angle A=90°$

同様に，$b=0$ のときは $\angle B=90°$，$c=0$ のときは $\angle C=90°$

以上から，$abc=0$ のとき，$\triangle$ABC は直角三角形 … 答

(2) $(a-b)(b-c)(c-a)=0$ のとき，$a=b$ または $b=c$ または $c=a$

$a=b$，すなわち $\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ のとき

$$\begin{aligned}
&-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})\\
\Leftrightarrow\ &\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\left(-\overrightarrow{\mathrm{AC}}-(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})\right)=0\\
\Leftrightarrow\ &\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-2\overrightarrow{\mathrm{AC}})=0\\
\Leftrightarrow\ &|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0\ \cdots①
\end{aligned}$$

$b=c$ のとき，すなわち $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ のとき

B を始点にとり，同様に計算すると $|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0\ \cdots②$

$c=a$ のとき，すなわち $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ のとき

C を始点にとり，同様に計算すると $|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=0\ \cdots③$

一方，
$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2&=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2\\
&=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\ \cdots①'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2&=|\overrightarrow{\mathrm{BA}}-\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2\\
&=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}\ \cdots②'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2&=|\overrightarrow{\mathrm{CB}}-\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|^2\\
&=|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}\ \cdots③'
\end{aligned}$$

したがって，①，②，③ のいずれかが成立しているとき，
$①'=0$，$②'=0$，$③'=0$
のいずれかが成立する。

つまり，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ のいずれかが成立するので，$\triangle$ABC は二等辺三角形である。… 答

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$
$=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}})$
$=-\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$
$=-a-b$

$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$
$=\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}})$
$=-\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}$
$=-a-c$

また，$(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2=(-\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}})^2=(-a)^2=a^2$

よって，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積 S は

$$
\begin{aligned}
S&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{(-a-b)(-a-c)-a^2}\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+ca+ab+bc-a^2}\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{ab+bc+ca}
\end{aligned}
$$

となり，題意は示された。

【総括】

巡回性をもっており，キレイな結果です。

今回の a，b，c というのは内積として与えられている値です。

内積としての条件はパッと見で判断できるものは「$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ が垂直条件」ぐらいのもので，その他については即決できないことの方が多いでしょう。

まぁだからこそ，今回のように問題になっているのでしょうけど。

最後の面積の結果はキレイではありますが，実戦で使うかといったら多分使われることはないでしょう。

実用的かどうかはともかく，問題をパッと見て思わず解いてみたくなる問題かなと思います。

【戦略】の最後で述べたように，

a，b，c から $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2$ が登場するように変形する

という方針でもやってみます。(本質的に同じ事になるとは思いますが)

(3)　部分的別解

$a=\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$
$=\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}})$
$=-|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}$
$=-|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-c$

これより，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=-c-a$

また，$b=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$
$=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})$
$=-|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$
$=-|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2-a$

これより，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=-a-b$

(以下 $\boxed{解答}$ と同様)