座標平面上の原点から次の規則で動く。
格子点 (原点を含む) ではコインを投げ , 表が出れば x 軸の正の方向に 1 , 裏が出れば y 軸の正の方向に 1 進む。
コインを N 回投げ , 長さ N だけ進むあいだに , 直線 $x=2$ 上を長さ 1 以上通過する確率を P_N とする。
このとき次の問いに答えよ。また , 格子点とは x 座標と y 座標がともに整数となる点のことである。

(1)　P_4 を求めよ。

(2)　P_N $(N \geqq 3)$ を求めよ。

＜ ’95 北海道大 ＞

＜戦略＞

(1) の具体例での実験で掴んだことを (2) の一般の場合へ応用する力が求められます。

「N 回の移動で $x=2$ 上を長さ 1 以上通過する 」とは

「$N-1$ 回目までに $x=2$ に乗る 」
かつ
「その直後に上向きに移動 (裏が出る) 」

という 2 つのハードルをクリアーすると翻訳できればあとは基本的な反復試行の確率となります。

「$N-1$ 回目までに $x=2$ に乗る 」という部分は「k 回目で $x=2$ に乗る」として $k=2, 3, \cdots, N-1$ で $\sum$ すればよいでしょう。

その際 , (等差) × (等比) 型の $\sum$ が現れますから , セオリー通り , 公比をかけてズラす「かけズラ」で処理してください。

解答

(1)　3 回目までに表が 2 回出て , その直後に裏が出ればよく

この一文が (2) につながる考え方です

○○×△
○×○×　(○は表 , ×は裏 , △は何でもよい ということを表す .)
×○○×

のいずれかが起こる確率が P_4 である。

ゆえに , $P_4=\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{4}$ …答

(2)　P_N とは

「 $N-1$ 回目までに表が 2 回出て , その直後に裏が出る 」… ①

となる確率

k 回目 ($2 \leqq k \leqq N-1$) に2 回目の表が出るとする。

そうなる確率は

「 $k-1$ 回中 1 回表 , $k-2$ 回裏が出る」
かつ
「 k 回目に表が出る 」

という確率であり , ${}_{k-1}\mathrm{C}_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}\times\frac{1}{2}=\frac{k-1}{2^k}$

その直後に裏が出れば , $x=2$ 上を長さ 1 以上動くことになるので

①の事象のうち , k 回目 ($2 \leqq k \leqq N-1$) に 2 回目の表が出て , その直後に裏が出る確率は

$$\frac{k-1}{2^k}\times\frac{1}{2}=\frac{k-1}{2^{k+1}}$$

よって , $P_N=\sum_{k=2}^{N-1}\frac{k-1}{2^{k+1}}$

(等差) × (等比) 型
→ 公比をかけてずらす ! (かけずら)

$$P_N=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5+\cdots\cdots+(N-2)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^N$$
$$\frac{1}{2}P_N=\qquad 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5+\cdots\cdots+(N-3)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^N+(N-2)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}$$

辺々引いて

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}P_N&=\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^N-(N-2)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}\\&=\frac{\frac{1}{8}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{N-2}\right\}}{1-\frac{1}{2}}-(N-2)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}\\&=\frac{1}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{N-2}\right\}-(N-2)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}\\&=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^N-(N-2)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P_N &= \frac{1}{2}-\frac{1}{2^{N-1}}-\frac{N-2}{2^N} \\
&= \frac{1}{2}-\frac{2+(N-2)}{2^N} \\
&= \frac{1}{2}-\frac{N}{2^N} \quad \cdots \text{答}
\end{aligned}
$$

＜戦略２＞

(2) は最初の第１歩目として「余事象の活用」を考えつけば，正攻法でぶつかるよりも計算量は抑えることができます。

その際「余事象を正しく認識する」ということがとても大切になります。題意の事象と余事象と比較してどちらが取り組みやすいかを判断するクセをつけておきたいところです。

また，この方針の場合，対称性をうまく利用することになります。
実際の緊張した試験では中々そういったうまい解法は出てこないかもしれませんが，普段の学習の中では何かうまく解決できないか探る姿勢は持ち合わせて欲しいものです。

(2) 別解

P_N とは

「 $N-1$ 回目までに表が 2 回出て，その直後に裏が出る 」… ①

となる確率

余事象を正しく言えるように！

① の余事象は

「 $N-1$ 回目までに表が 2 回出て，その直後に表が出る 」… ②
または
「 $N-1$ 回目までに表が 0 回 または 1 回 」… ③

対称性に注目することも大切な考え方です！

② の確率を Q_N とすると，対称性から $P_N=Q_N$ … $(*)$

③ の確率を R_N とすると，

$N-1$ 回中，表が 0 回となる確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}$

$N-1$ 回中，表が 1 回，裏が $N-2$ 回となる確率は

$$ {}_{N-1}\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{N-2}=\frac{N-1}{2^{N-1}} $$

よって，$R_N=\frac{1}{2^{N-1}}+\frac{N-1}{2^{N-1}}=\frac{N}{2^{N-1}}$ … $(*)'$

$1-P_N=Q_N+R_N$ であり，$(*)$，$(*)'$ から

$$ 1-P_N=P_N+\frac{N}{2^{N-1}} $$

ゆえに，$2P_N=1-\frac{N}{2^{N-1}}$ であり，$P_N=\frac{1}{2}-\frac{N}{2^N}$ …答

【総括】

「○○とは」と，事象を分かりやすい形で噛み砕く力が求められます。

事象を分かりやすく捉える力は，この分野で力を伸ばしていくうえで根本となる力です。

「公式を覚え，正しく運用すれば力が付く」と信じている人にとっては耳が痛い話ですが，場合の数・確率の分野においてはそれだけでは頭打ちすることになるでしょう。

事象を的確に捉えられるからこそ，「何を計算したらいいのか」「どう計算したらいいのか」という次の話に進むということを忘れてはなりません。