次の問いに答えよ。

(1)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，方程式 $\cos 2\theta + \sin\theta = 1$ を解け。

(2)　連立方程式 $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ \cos x - \cos y = \sqrt{3} \end{cases}$ （$0 \leqq x \leqq \pi$，$0 \leqq y \leqq \pi$）を解け。

(3)　$0 \leqq \theta \leqq \pi$ とするとき，等式 $\cos 4\theta = \cos 2\theta$ を満たす θ の値をすべて求めよ。

(4)　$\sin\theta$，$\sin 2\theta$，$\dfrac{1}{2} + \sin\theta$ がこの順序で等比数列をなすとき，θ の値を求めよ。ただし，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする。

＜(1) '19 琉球大　(2) '04 中部大　(3) '19 名古屋市立大　(4) '94 福井医科大＞

【戦略】

三角関数についての方程式，不等式を扱う際には

①：種類の統一
②：角度の統一

ということを基本方針として狙っていきたいところです。

また，仕留める際には

・置き換え型
・合成型
・中身比べ型

を意識しながら処理することが基本です。

(1) **は角度を統一するために２倍角の公式を用います。その際，**
$\cos 2\theta = \begin{cases} 2\cos^2\theta - 1 \\ 1 - 2\sin^2\theta \end{cases}$ **と２通りの変形が考えられますが，種類を統一することを考えればどちらを選択するかは迷う余地がありません。**

最終的に「置き換え２次方程式」となることが予想できると思います。

(2) **は辺々２乗して加えることも考えられますが，同値性が崩れるため，あまりオススメしません。文字消去という一番シンプルな方針で処理します。**

三角関数における文字消去は $\sin^2 + \cos^2 = 1$ **を利用します。**
本問は文字消去すると，合成型の顔が現れます。

(3) **は２倍角公式を利用してもいいでしょうが，**$\cos\square = \cos\triangle$ **という形から中身比べ型で処理するのがスマートです。**

もちろん単純に $\square = \triangle$ **とはできません。**
「$\cos$ **が等しい」とはどういうことか**
ということをしっかりと考えて処理します。

(4) **は思っているよりも難問です。**
等比中項の処理までは手なりに進めてほしいですが，その後は式変形によっては迷宮入りする可能性も多々あります。

解答

(1)　与えられた方程式は $(1 - 2\sin^2\theta) + \sin\theta = 1$

整理すると，$2\sin^2\theta - \sin\theta = 0$，すなわち $\sin\theta(2\sin\theta - 1) = 0$

よって，$\sin\theta = 0$，$\dfrac{1}{2}$

$\sin\theta = 0$ を満たす θ は $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で $\theta = 0$，π

$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ を満たす θ は $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で $\theta = \dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5}{6}\pi$

以上から求める方程式の解は $\theta = 0$，$\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5}{6}\pi$，π …答

(2)　与えられた２式から $\begin{cases} \sin y = 1 - \sin x \\ \cos y = \cos x - \sqrt{3} \end{cases}$ …①

これらを $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ に代入すると

$$(1 - \sin x)^2 + (\cos x - \sqrt{3})^2 = 1$$

これを整理すると $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2$ を得る。

ゆえに，$2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 2$，すなわち $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 1$

$\dfrac{\pi}{3} \leqq x + \dfrac{\pi}{3} \leqq \dfrac{4}{3}\pi$ の範囲なので，$x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2}$

すなわち $x = \dfrac{\pi}{6}$

このとき，① より $\begin{cases} \sin y = 1 - \sin\dfrac{\pi}{6} \left(= \dfrac{1}{2} \right) \\ \cos y = \cos\dfrac{\pi}{6} - \sqrt{3} \left(= -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \right) \end{cases}$

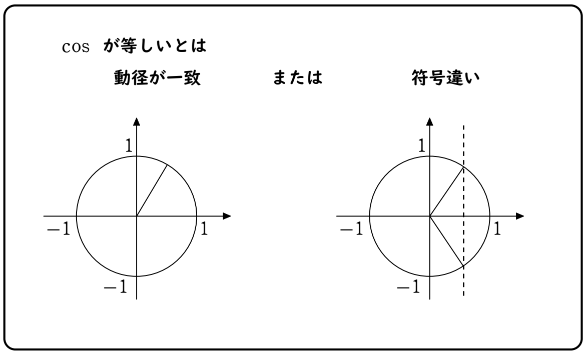
$0 \leqq y \leqq \pi$ の範囲でこれらを満たすのは $y = \dfrac{5}{6}\pi$

以上から，$(x, y) = \left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5}{6}\pi \right)$ …答

(3)　$\cos 4\theta = \cos 2\theta$　より，m，n　を整数として，

$$2\theta = 4\theta + 2m\pi \text{，または } 2\theta = -4\theta + 2n\pi$$

すなわち，$\theta = -m\pi$，　または　$\theta = \dfrac{n\pi}{3}$　を得る。



$\theta = -m\pi$　のとき

$0 \leqq \theta \leqq \pi$　より　$0 \leqq -m\pi \leqq \pi$　であり，これを満たす整数 m は

$$m = 0，-1$$

すなわち，$\theta = 0，\pi$

$\theta = \dfrac{n\pi}{3}$　のとき

$0 \leqq \theta \leqq \pi$　より　$0 \leqq \dfrac{n\pi}{3} \leqq \pi$　であり，これを満たす整数 n は

$$n = 0，1，2，3$$

すなわち　$\theta = 0，\dfrac{\pi}{3}，\dfrac{2}{3}\pi，\pi$

以上から求める θ の値は　$\theta = 0，\dfrac{\pi}{3}，\dfrac{2}{3}\pi，\pi$ … 答

(3) 別解

$\cos 4\theta = \cos 2\theta$　より，$2\cos^2 2\theta - \cos 2\theta - 1 = 0$

これより，$(2\cos 2\theta + 1)(\cos 2\theta - 1) = 0$

$$\therefore\ \cos 2\theta = 1，-\frac{1}{2}$$

$\cos 2\theta = 1$ のとき
$0 \leqq \theta \leqq \pi$，　すなわち　$0 \leqq 2\theta \leqq 2\pi$　の範囲では　$2\theta = 0，2\pi$
ゆえに，$\theta = 0，\pi$

$\cos 2\theta = -\dfrac{1}{2}$　のとき

$0 \leqq \theta \leqq \pi$，　すなわち　$0 \leqq 2\theta \leqq 2\pi$　の範囲では　$2\theta = \dfrac{2}{3}\pi，\dfrac{4}{3}\pi$

ゆえに，$\theta = \dfrac{\pi}{3}，\dfrac{2}{3}\pi$

以上から求める θ の値は　$\theta = 0，\dfrac{\pi}{3}，\dfrac{2}{3}\pi，\pi$ … 答

(3)　$\sin\theta$，$\sin 2\theta$，$\dfrac{1}{2} + \sin\theta$　がこの順で等比数列となるとき

$$\sin^2 2\theta = \sin\theta\left(\frac{1}{2} + \sin\theta\right)$$

すなわち　$(2\sin\theta\cos\theta)^2 = \sin\theta\left(\dfrac{1}{2} + \sin\theta\right)$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$　より，$\sin\theta \fallingdotseq 0$　であるから，両辺 $\sin\theta$ で割ると

$$4\sin\theta\cos^2\theta = \frac{1}{2} + \sin\theta$$
$$4\sin\theta(1 - \sin^2\theta) = \frac{1}{2} + \sin\theta$$
$$3\sin\theta - 4\sin^3\theta = \frac{1}{2}$$
$$\sin 3\theta = \frac{1}{2}$$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$　より，$0 < 3\theta < \dfrac{3}{2}\pi$　であり，$3\theta = \dfrac{\pi}{6}，\dfrac{5}{6}\pi$

ゆえに，$\theta = \dfrac{\pi}{18}，\dfrac{5}{18}\pi$ … 答

【総括】

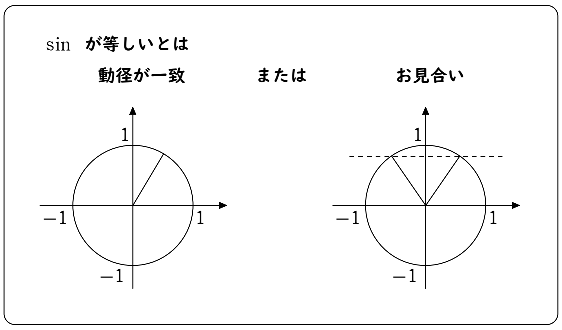
置き換え型，合成型については，単元学習において触れる機会も多々ありますから，対応していきたいところです。

それに比べて中身比べ型は手馴れていないと発想が出づらいですし，中途半端に覚えても処理を誤ることもあります。
三角関数絡みの方程式としては中身比べ型は置き換え型，合成型に比べて敷居が高いかもしれません。

ここでは扱っていませんが，$\sin\square = \sin\triangle$　タイプの中身比べ型については

$$\square = \triangle + 2m\pi \text{，または } \square = (\pi - \triangle) + 2n\pi$$

と処理します。



(4) は $4\sin\theta(1-\sin^2\theta)=\dfrac{1}{2}+\sin\theta$ あたりで分母を払ってしまい

$$8\sin^3\theta-6\sin\theta+1=0$$

$\sin\theta=t$ とおいて

$$8t^3-6t+1=0$$

などとしてしまうと収集がつかなくなってしまいます。

本問の結果が意味しているのは $t=\sin 10°$，$\sin 50°$ が $8t^3-6t+1=0$ の解となっているということです。

もちろん本問を解いている段階ではこの３次方程式を解くことはほぼ無理でしょう。

つまり，本問を解き終わったあとに，この３次方程式が解けることになります。

したがって，この３次方程式を解くことで本問を解くことはできません。

ちなみにこの３次方程式の残る１つの解はというと，$\sin 3\theta=\dfrac{1}{2}$ を一般的に解けば分かります。

一般解としては $3\theta=\dfrac{\pi}{6}+2m\pi$，または $3\theta=\dfrac{5}{6}\pi+2n\pi$

すなわち $\theta=\dfrac{(12m+1)\pi}{18}$，$\dfrac{(12n+5)\pi}{18}$ （m，n は整数）

ですから，$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲では

$$\theta=\frac{\pi}{18},\ \frac{5}{18}\pi,\ \frac{13}{18}\pi,\ \frac{17}{18}\pi,\ \frac{25}{18}\pi,\ \frac{29}{18}\pi$$

$$\sin\frac{\pi}{18}=\sin\frac{17}{18}\pi\ ,\ \sin\frac{5}{18}\pi=\sin\frac{13}{18}\pi\ ,\ \sin\frac{25}{18}\pi=\sin\frac{29}{18}\pi$$

なので，$8t^3-6t+1=0$ の解は

$$t=\sin 10°,\ \sin 50°,\ \sin 250°$$

ということになります。（イメージ優先で度数法で表記しました。）

有名角以外の三角比の値を解にもつ方程式という話題では「チェビシェフの多項式」という関連話題があります。

もちろんこの話題はノーヒントでは厳しいので誘導はつくと思います。
難関大を目指すのであれば一度は触れておきたい話題でしょう。