表が出る確率が p，裏が出る確率が $1-p$ であるような硬貨がある。ただし，$0<p<1$ とする。この硬貨を投げて次のルール (R) の下で，ブロック積みゲームを行う。

(R)
① ブロックの高さは，最初は 0 とする。
② 硬貨を投げて表が出れば高さ 1 のブロックを 1 つ積み上げ，裏が出ればブロックを全て取り除いて高さ 0 に戻す。

n を正の整数，m を $0 \leqq m \leqq n$ を満たす整数とする。

(1) n 回硬貨を投げたとき，最後にブロックの高さが m となる確率 p_m を求めよ。
(2) (1) で，最後にブロックの高さが m 以下となる確率 q_m を求めよ。
(3) ルール (R) の下で，n 回の硬貨投げを独立に 2 度行い，それぞれ最後のブロックの高さを考える。2 度のうち，高い方のブロックの高さが m である確率 r_m を求めよ。
ただし，最後のブロックの高さが等しいときはその値を考えるものとする。

＜ '07 東京大 ＞

【戦略Ⅰ】

表が出ることを○，裏が出ることを×と表します。

リセットがあることを考えると，得点は「最後に何回 ○ が連続したか」によって決まることになります。

普通このゲームでイメージするのは

途中裏が出てリセットされて「あぁ～」という経験をして得点が決まる、というケースではないでしょうか。

よって，一度も表が出ない (高さが 0) の場合や，一度も裏が出ない (高さが n) という特別な場合は別に考えることにします。
(※ 結果論から言うと，$m=0$ のときは合体できます。)

(2) は高さが m 以下となる確率とは，高さが 0，1，2，…，m となる確率なので，$\sum_{k=0}^{m} p_k$ を計算すればよいだけです。一般項 p_k を与える式が k の範囲によって変わってくることに注意します。

(3) は「1 回目と 2 回目でどちらが高さ m か 」で分けて考えると分かりやすいでしょう。

解答

(1) 表が出ることを○，裏が出ることを×，どちらでもよいことを△と表す。

(i) $m=n$ のとき

$\overbrace{○○○\cdots○}^{n\text{ 個}}$ となるときで，その確率は p^n

(ii) $m=0$ のとき

$\overbrace{△△△\cdots△}^{n\text{ 個}}×$ となるときで，その確率は $1^{n-1}\cdot(1-p)=1-p$

(iii) $1 \leqq m \leqq n-1$ のとき

$△△△\cdots△×\overbrace{○○○\cdots○}^{m\text{ 個}}$ となるときで，その確率は $(1-p)\cdot p^m$

これは，$m=0$ のときにも正しい結果を与えるので，(ii) の場合も含めてよい。

以上から $p_m=\begin{cases}(1-p)\cdot p^m & (0 \leqq m \leqq n-1 \text{ のとき}) \\ p^m & (m=n \text{ のとき})\end{cases}$ …答

(2) (i) $m=n$ のとき

n 回コインを投げれば，必ず高さは n 以下だから，$q_m=1$

(ii) $0 \leqq m \leqq n-1$ のとき

高さが m 以下とは
高さが 0，1，2，…，$m-1$，m となるときで，これらは各々排反であるから

$$\begin{aligned}q_m&=p_0+p_1+p_2+\cdots+p_m\\&=\sum_{k=0}^{m}p_k\\&=\sum_{k=0}^{m}(1-p)p^k\\&=(1-p)\{p^0+p^1+\cdots+p^m\}\\&=(1-p)\cdot\frac{1-p^{m+1}}{1-p}\\&=1-p^{m+1}\end{aligned}$$

以上から $q_m=\begin{cases}1-p^{m+1} & (0 \leqq m \leqq n-1 \text{ のとき}) \\ 1 & (m=n \text{ のとき})\end{cases}$ …答

(3) (Ⅰ) 1 回目の高さが m，2 回目の高さが m のとき

こうなる確率は ${p_m}^2$

(Ⅱ) 1 回目の高さが m，2 回目の高さが $m-1$ 以下のとき
(ただし，$m \geqq 1$ とする)

こうなる確率は $p_m \times q_{m-1}$

(Ⅲ) 1 回目の高さが $m-1$ 以下，2 回目の高さが m のとき
(ただし，$m \geqq 1$ とする)

こうなる確率は $q_{m-1} \times p_m$

以上から，$1 \leqq m \leqq n$ のとき

$$r_m = p_m{}^2 + 2p_m q_{m-1} = \begin{cases} (1-p)^2 p^{2m} + 2(1-p)p^m & (1 \leqq m \leqq n-1 \text{ のとき}) \\ p^{2m} + 2p^m(1-p^m) & (m = n \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (1-p)p^m(2-p^m-p^{m+1}) & (1 \leqq m \leqq n-1 \text{ のとき}) \cdots (☆) \\ p^m(2-p^m) & (m = n \text{ のとき}) \end{cases}$$

$m=0$ のときは $r_0 = p_0{}^2 = (1-p)^2$ で，(☆) は $m=0$ のときも成立する。

以上から

$$r_m = \begin{cases} (1-p)p^m(2-p^m-p^{m+1}) & (0 \leqq m \leqq n-1 \text{ のとき}) \\ p^m(2-p^m) & (m = n \text{ のとき}) \end{cases} \cdots \boxed{\text{答}}$$

【(3) 戦略２】～方針のみ～

(3) の $\boxed{\text{解答}}$ では「 高さが $m-1$ 以下 」という表現が意味をもつために
$m \geqq 1$ である必要がありましたから場合分けの必要性が生じました。

その煩雑さを回避しようとすると

$$\begin{cases} \text{A} : 1 \textbf{ 回目は高さ } m, 2 \textbf{ 回目は高さ } m \textbf{ 以下} \\ \text{B} : 1 \textbf{ 回目は高さ } m \textbf{ 以下}, 2 \textbf{ 回目は高さ } m \end{cases}$$ **という事象 A，B に対し，**

$r_m = P(\text{A} \cup \text{B})$
$= P(\text{A}) + P(\text{B}) - P(\text{A} \cap \text{B})$
$= p_m q_m + q_m p_m - p_m{}^2$（$\boxed{\text{注}}$：A ∩ B **とは 1 回目，2 回目ともに高さが m という事象**）
$= 2p_m q_m - p_m{}^2$

を計算する方針が考えられます。

【総括】

高さが m， 高さが m 以下という現象とはどういうことか，といった事象の分析を真正面から問いかけている問題です。

小手先のテクニックや機械的なパターン学習で対応できる類の問題ではありません。

また，出てくる結論は試験場だと少し不安な形ですから，少しでも確信をもつためにも簡単な数字で検算してみるとよいでしょう。