円 $x^2+(y-2)^2=1$ を C とし，放物線 $y=x^2$ の上に相異なる 3 点

$$\mathrm{A}(2,\ 4),\ \mathrm{P}(p,\ p^2),\ \mathrm{Q}(q,\ q^2)\ \ (p<q)$$

をとる。直線 AP，AQ がともに円 C に接するとき，次の問いに答えよ。

(1) p，q を求めよ。

(2) 直線 PQ が円 C に接することを示せ。

＜ '06 大阪市立大 ＞

【戦略】

(1) **まずは直線 AP と円 C が接するということを翻訳します。**

直線 AP の方程式を出し，円 C の中心 $(0,\ 2)$ との距離が半径 1 となると翻訳するのが常套手段です。

これを整理すると $3p^2+4p-1=0$ を得ることになります。

（この 2 次方程式をこの段階で解くと記述がしにくいのでグッと堪えて，直線 AQ と円 C が接することの翻訳にうつります。）

直線 AQ と円 C が接するという条件も p を q に変えるだけで，同じ要領で得ることができます。

つまり，$3q^2+4q-1=0$ を得ます。

このことから，p，q は X の 2 次方程式 $3X^2+4X-1=0$ の解ということになり，これを解くと $X=\dfrac{-2\pm\sqrt{7}}{3}$ となります。

条件 $p<q$ から，小さい方が p，大きい方が q に対応します。

(2) **具体的に p，q が求まっているので，直線 PQ も具体的に求まります。**

円 C の中心 $(0,\ 2)$ と直線 PQ の距離を d としたとき，

$d=$(円 C の半径)，すなわち $d=1$ を目指せばよいでしょう。

直線 PQ を求める際は，$p=\dfrac{-2-\sqrt{7}}{3}$，$q=\dfrac{-2+\sqrt{7}}{3}$ と汚いので，出来る限り文字 p，q のまま計算を進めます。

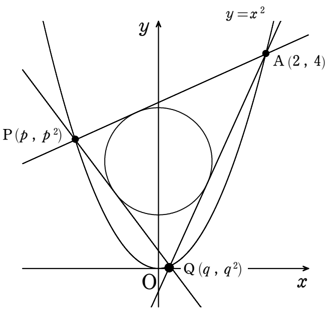
今回，直線 PQ の傾きは $\dfrac{p^2-q^2}{p-q}=\dfrac{(p+q)(p-q)}{p-q}=p+q$

なので，直線 PQ の式は $y=(p+q)(x-p)+p^2$

すなわち $y=(p+q)x-pq$ ということになり，基本対称式 $p+q$，pq が得られれば事足ります。

解と係数の関係に注目するのも自然ですが，今回は p，q が具体的に求まっているため，そこまでしなくとも $p+q=-\dfrac{4}{3}$，$pq=-\dfrac{1}{3}$ が直ちに得られます。

【解答】



(1) 直線 AP の方程式は

$$y=\frac{p^2-4}{p-2}(x-2)+4$$

すなわち

$$(p+2)x-y-2p=0$$

これが円 C と接するので，
円 C の中心 $(0,\ 2)$ と直線 AP の距離が
円 C の半径 1 と等しいため，

$$\frac{|-2-2p|}{\sqrt{(p+2)^2+1}}=1$$

分母を払うと $|2p+2|=\sqrt{(p+2)^2+1}$

両辺 0 以上の値なので $(2p+2)^2=(p+2)^2+1$

これを整理すると $3p^2+4p-1=0$

直線 AQ が円 C と接するための条件は，p を q と変えれば得られ，

$$3q^2+4q-1=0$$

これより p，q は X の 2 次方程式 $3X^2+4X-1=0$ の解であり，
解 $X=\dfrac{-2\pm\sqrt{7}}{3}$ に対応する。

条件 $p<q$ を考えると $p=\dfrac{-2-\sqrt{7}}{3}$，$q=\dfrac{-2+\sqrt{7}}{3}$ …答

(2) 直線 PQ の方程式は $y=\dfrac{p^2-q^2}{p-q}(x-p)+p^2$

すなわち，$y=(p+q)x-pq$

$\begin{cases} p+q=-\dfrac{4}{3} \\ pq=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$ であることに注意すると，$y=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{1}{3}$

これを整理すると $4x+3y-1=0$

円 C の中心 $(0,\ 2)$ と直線 PQ の距離 d は

$$d=\frac{|\,4\cdot 0+3\cdot 2-1\,|}{\sqrt{4^2+3^2}}=1$$

となり，$d=$(円 C の半径) が成立し，円 C と直線 PQ は接する。

【総括】

例題で扱った名古屋大学の問題の構図を y 軸方向に $+2$ 平行移動したものです。

今回は A$(2,\ 4)$ と具体的でしたが，ポンスレの閉形定理により，
A$(a,\ a^2)$ という一般的なシチュエーションに対して今回の主張が成り立つことになります。

【検証】 A(a, a^2) **に対して今回の主張が成り立つことを確認する**

$y=x^2$ 上の点 T(t, t^2) に対して

直線 AT の方程式は $y=\dfrac{t^2-a^2}{t-a}(x-a)+a^2$

すなわち $y=(t+a)(x-a)+a^2$

これを整理すると，$(t+a)x-y-at=0$

これが円 C と接するとき，$\dfrac{|-2-at|}{\sqrt{(t+a)^2+(-1)^2}}=1$

分母を払い，$|at+2|=\sqrt{(t+a)^2+1}$

両辺 0 以上の値であり，両辺 2 乗して，$(at+2)^2=(t+a)^2+1$

これを整理すると $(a^2-1)t^2+2at-a^2+3=0$

この t についての 2 次方程式の解が p，q である。

直線 PQ の方程式は $y=\dfrac{p^2-q^2}{p-q}(x-p)+p^2$

すなわち，$y=(p+q)x-pq$

解と係数の関係から $\begin{cases} p+q=-\dfrac{2a}{a^2-1} \\ pq=\dfrac{-a^2+3}{a^2-1} \end{cases}$ であるため，直線 PQ の式は

$$y=-\frac{2a}{a^2-1}x+\frac{a^2-3}{a^2-1}$$

これを整理すると $2ax+(a^2-1)y-a^2+3=0$

ゆえに，直線 PQ と $(0, 2)$ との距離 d は

$$\begin{aligned} d&=\frac{|2(a^2-1)-a^2+3|}{\sqrt{4a^2+(a^2-1)^2}} \\ &=\frac{|a^2+1|}{\sqrt{a^4+2a^2+1}} \\ &=\frac{|a^2+1|}{\sqrt{(a^2+1)^2}} \\ &=\frac{|a^2+1|}{|a^2+1|} \\ &=1 \end{aligned}$$

と，$d=$(円 C の半径) が成り立つため，直線 PQ は円 C と接する。