放物線 $y=x^2-2$ 上に相異なる 3 点

$$\mathrm{P}(a,\ a^2-2),\ \mathrm{Q}(b,\ b^2-2),\ \mathrm{R}(c,\ c^2-2)$$

がある。原点を中心とする半径 1 の円を S とし，直線 PQ，直線 PR はそれぞれ S に接するとする。

(1) 線分 QR の中点の座標を a を用いて表せ。

(2) 直線 QR もまた S に接することを証明せよ。

＜ '88 名古屋大 ＞

【戦略】

線分 QR の中点 M の座標は $\left(\dfrac{b+c}{2},\ \dfrac{b^2+c^2-4}{2}\right)$ **ですから対称式の利用を考えていきたいです。**

つまり，$b+c$ や bc などが得られればいいなという心構えで進めていきたいと思います。

ひとまずは直線 PQ の式を立てて，それが S に接するということをゴリゴリ翻訳していけば

$$(ab+2)^2=(a+b)^2+1$$

という式を Get できるでしょう。

もちろん直線 PR についても S に接するので，同じことをやってもいいのですが，さっきと何が違うかと言ったら b が c になっているだけです。

したがって，$(ac+2)^2=(a+c)^2+1$ もすぐさま得られます。

ここから，$\begin{cases}(a^2-1)b^2+2ab+3-a^2=0\\(a^2-1)c^2+2ac+3-a^2=0\end{cases}$ **という 2 つの b，c に関する方程式が得られますが，先ほどの「$b+c$，bc を得よう」という気持ちがあれば，b，c が**

$$(a^2-1)X^2+2aX+3-a^2=0$$

の 2 解になっていると見て，解と係数の関係にもっていきたいところです。

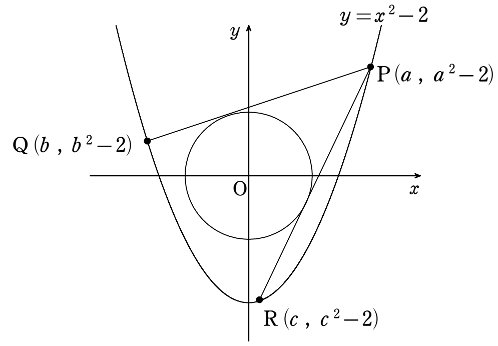
ここから先は計算ミスに気を付けて計算するのみです。

(2) **は** (直線 QR と S の中心との距離)$=$(S の半径)$(=1)$ **を証明することが目標となります。**

直線 QR の式を求めると $(b+c)x-y-bc-2=0$

と，$b+c$，bc が含まれていますから，(1) で用いた解と係数の関係がここでも利用できそうです。

解答



$$(\text{PQ の傾き})=\frac{(a^2-2)-(b^2-2)}{a-b}=a+b$$

$$(\text{PR の傾き})=\frac{(a^2-2)-(c^2-2)}{a-c}=a+c$$

直線 PQ の式は $y=(a+b)(x-a)+a^2-2$

これを整理すると $(a+b)x-y-ab-2=0$

直線 PQ が S に接するので

$$(\text{直線 PQ と }(0,\ 0)\text{ との距離})=(S\text{ の半径})$$

が成り立ち，

$$\frac{|-ab-2|}{\sqrt{(a+b)^2+1}}=1$$

これより，$(ab+2)^2=(a+b)^2+1$ …①

同様にして $(ac+2)^2=(a+c)^2+1$ …②

これより，X の方程式

$(aX+2)^2=(a+X)^2+1$，すなわち

$$(a^2-1)X^2+2aX+3-a^2=0 \ \cdots(*)$$

の異なる 2 つの実数解が b，c である。

$a=\pm1$ のとき ①，② より $b=c$ となってしまい，$b\neq c$ に反する。

よって，$a\neq\pm1$

このとき，$(*)$ の判別式を D とすると

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=a^2-(a^2-1)(3-a^2)\\&=a^4-3a^2+3\\&=\left(a^2-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0\end{aligned}$$

より，$(*)$ は異なる 2 つの実数解をもつ。

解と係数の関係から $\begin{cases}b+c=-\dfrac{2a}{a^2-1}\\[2mm] bc=\dfrac{3-a^2}{a^2-1}\end{cases}$ … ③

線分 QR の中点 M は $\mathrm{M}\left(\dfrac{b+c}{2},\ \dfrac{b^2+c^2-4}{2}\right)$

③ より

$$\frac{b+c}{2}=-\frac{a}{a^2-1}$$

$$\begin{aligned}\frac{b^2+c^2-4}{2}&=\frac{(b+c)^2-2bc-4}{2}\\&=\frac{1}{2}(b+c)^2-bc-2\\&=\frac{1}{2}\left(-\frac{2a}{a^2-1}\right)^2-\frac{3-a^2}{a^2-1}-2\\&=\frac{-a^4+2a^2+1}{(a^2-1)^2}\\&=\frac{-(a^2-1)^2+2}{(a^2-1)^2}\\&=\frac{2}{(a^2-1)^2}-1\end{aligned}$$

よって，$\mathrm{M}\left(-\frac{a}{a^2-1}, \frac{2}{(a^2-1)^2}-1\right)$ … 答

(2) （直線 QR の傾き）$=b+c$ より直線 QR の式は

$y=(b+c)(x-b)+b^2-2$ で，これを整理すると

$$(b+c)x-y-bc-2=0$$

直線 QR と $(0, 0)$ との距離を d とすると

$$d=\frac{|-bc-2|}{\sqrt{(b+c)^2+1}}$$

$$=\frac{\left|-\frac{3-a^2}{a^2-1}-2\right|}{\sqrt{\left(-\frac{2a}{a^2-1}\right)^2+1}} \quad (\because ③)$$

$$=\frac{\left|\frac{a^2+1}{a^2-1}\right|}{\sqrt{\frac{4a^2+(a^2-1)^2}{(a^2-1)^2}}}$$

$$=\frac{\left|\frac{a^2+1}{a^2-1}\right|}{\sqrt{\frac{(a^2+1)^2}{(a^2-1)^2}}}$$

$$=\frac{\left|\frac{a^2+1}{a^2-1}\right|}{\left|\frac{a^2+1}{a^2-1}\right|}$$

$$=1$$

$$=(S \text{ の半径})$$

となり，直線 QR は S に接する。

以上から題意は示された。

【総括】

P から見て，Q，R は対等な立場ですから，省エネできるところは省エネしましょう。

ここで

$$① \Leftrightarrow a^2b^2+4ab+4=a^2+2ab+b^2+1$$
$$② \Leftrightarrow a^2c^2+4ac+4=a^2+2ac+c^2+1$$

①−② より

$$a^2(b^2-c^2)+4a(b-c)=2a(b-c)+(b^2-c^2)$$

$$a^2(b+c)(b-c)+4a(b-c)=2a(b-c)+(b+c)(b-c)$$

$b \neq c$ より $b-c \neq 0$ だから

$$a^2(b+c)+4a=2a+(b+c)$$

$$(a^2-1)(b+c)=-2a$$

$$b+c=-\frac{2a}{a^2-1}$$

というやり方だと，和は出すことができますが，積は苦しいですね。

(2) の結果はキレイな結果です。

背景には「ポンスレの閉形定理」というものがあります。

参考　ポンスレの閉形定理
2 つの 2 次曲線 C_0，C_1 と 3 以上の自然数 n について C_1 上のある点を
1 つの頂点として C_0 に外接し，C_1 に内接する n 角形が 1 つでも存在すれば，
C_1 上の任意の点についてそれを 1 つの頂点とする同様の n 角形が存在する。

本問は $C_0 : x^2+y^2=1$，$C_1 : y=x^2-2$ という具体的な 2 つの 2 次曲線について考えていることになります。

一般論の証明は難解ですが，このような特殊論としてネタにされることは難関大では過去に度々あるようです。（だからといってこの定理を無理に覚える必要はありません。）