

チェビシエフの多項式6

関数 $f_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を次のように定める。

$$f_1(x) = x^3 - 3x, \quad f_2(x) = \{f_1(x)\}^3 - 3f_1(x), \quad f_3(x) = \{f_2(x)\}^3 - 3f_2(x)$$

以下同様に, $n \geq 3$ に対して関数 $f_n(x)$ が定まったならば,

関数 $f_{n+1}(x)$ を $f_{n+1}(x) = \{f_n(x)\}^3 - 3f_n(x)$ で定める。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) a を実数とする。 $f_1(x) = a$ を満たす実数 x の個数を求めよ。
- (2) a を実数とする。 $f_2(x) = a$ を満たす実数 x の個数を求めよ。
- (3) n を3以上の自然数とする。 $f_n(x) = 0$ を満たす実数 x の個数は 3^n であることを示せ。

< '04 東京大 >