関数 $f_n(x)$（$n=1,2,3,\cdots\cdots$）を次のように定める。

$f_1(x)=x^3-3x$，$f_2(x)=\{f_1(x)\}^3-3f_1(x)$，$f_3(x)=\{f_2(x)\}^3-3f_2(x)$

以下同様に，$n\geqq 3$ に対して関数 $f_n(x)$ が定まったならば，

関数 $f_{n+1}(x)$ を $f_{n+1}(x)=\{f_n(x)\}^3-3f_n(x)$ で定める。このとき以下の問いに答えよ。

(1) a を実数とする。$f_1(x)=a$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

(2) a を実数とする。$f_2(x)=a$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

(3) n を3以上の自然数とする。$f_n(x)=0$ を満たす実数 x の個数は 3^n であることを示せ。

＜ '04 東京大 ＞

【戦略】

(1) **は具体例です。** $x^3-3x=a$ **という方程式の実数解は**

$\begin{cases} y=x^3-3x \\ y=a \end{cases}$ **の交点の** x **座標なので，「何個解をもつか」という問題は**

「何個の共有点をもつか」ということに帰着します。

いわゆる「定数分離」の問題と言われるタイプで，頻出です。

(2) **はまともに考えると** 9 **次方程式が出てきてしまい冗談じゃなくなります。**

$X=f_1(x)$ **という置き換えにより，**(1) **の形が現れることに気が付きたいところです。**

構造としては

$X^3-3X=a$ **を満たす** X **が求まる →** $x^3-3x=X$ **を満たす** x **が求まる**

という流れですから，a **の値によって** X **の範囲が分かり，それによって** x **の個数が分かる**

ということになります。

(3) **については** (1) → (2) **の流れが分かれば，それ以降も同じ要領だと思えるはずです。**

もちろん，それを裏付ける方法としては数学的帰納法ということになるでしょう。

ただ，突然 $a=0$ **になっているところが，かえってやりづらいです。**

(1)，(2) **の結論的に**

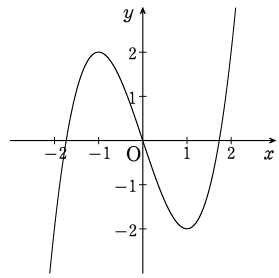
$|a|<2$ **のときに** $f_n(x)=a$ **の実数解の個数は** 3^n **である**

ということが言えそうなので，より一般的にこれを証明したいと思います。

解答

(1) $f_1{}'(x)=3(x+1)(x-1)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f_1{}'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f_1(x)$	↗	2	↘	-2	↗



$y=f_1(x)$ のグラフと $y=a$ のグラフの共有点の個数を求めればよいので

$$\begin{cases} |a|>2 \text{ のとき，1 個} \\ |a|=2 \text{ のとき，2 個} \\ |a|<2 \text{ のとき，3 個} \end{cases} \cdots 答$$

(2) $f_2(x)=a \cdots ①$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} f_1(x)=X \cdots ② \\ X^3-3X=a \cdots ③ \end{cases}$ で，(1) より

グラフの交点を考えてみましょう

$|a|>2$ のとき

③ を満たす X は 1 個で，その X は $|X|>2$ を満たしている。

$|a|<2$ のとき

③ を満たす X は 3 個で，その X は 3 個とも $|X|<2$ を満たしている。

$a=2$ のとき

③ を満たす X は $X=-1,\ 2$

$a=-2$ のとき

③ を満たす X は $X=1,\ -2$

一方 X と x の対応は ② で与えられ，これは (1) から

$$\begin{cases} |X|>2 \text{ のとき，} x \text{ は 1 個} \\ |X|=2 \text{ のとき，} x \text{ は 2 個} \\ |X|<2 \text{ のとき，} x \text{ は 3 個} \end{cases}$$

以上より ① を満たす実数 x の個数は $\begin{cases} |a|>2 \text{ のとき，1 個} \\ |a|=2 \text{ のとき，5 個} \\ |a|<2 \text{ のとき，9 個} \end{cases} \cdots 答$

補足

例えば $|a|<2$ **のとき** $X^3-3X=a$ **を満たす 実数** X **は** 3 **個あります。**

それらを X_1，X_2，X_3 **とします。**

このとき，グラフから $|X_1|<2$，$|X_2|<2$，$|X_3|<2$ **を満たします。**

これより $f_1(x)=X_1$，$f_1(x)=X_2$，$f_1(x)=X_3$ **という式を満たす** x **は再び** (1) **の結果を用いれば，それぞれ** 3 **個ずつ，合計** $3\times3=9$ **【個】ということになります。**

(3) $|a|<2$ のとき，$f_n(x)=a$ を満たす実数 x の個数が 3^n $\cdots(*)$

であることを数学的帰納法で示す。

(Ⅰ) $n=1$ のとき (1) より $(*)$ は正しい。

(Ⅱ) $n=k\ (k=1,2,3,\cdots\cdots)$ のとき $(*)$ が正しいと仮定する。

$$f_{k+1}(x)=a\ \cdots(ア) \iff \begin{cases} f_k(x)=X_k \ \cdots(イ) \\ {X_k}^3-3X_k=a\ \cdots(ウ) \end{cases}$$

$|a|<2$ のとき，(ウ) を満たす X_k は 3 個で，それらは 3 つとも

$|X_k|<2$ $\cdots$(エ) を満たしている。
(エ) より仮定から (ウ) を満たす X_k の値 1 つに対し(イ) を満たす x は 3^k 個あるので，(ア) を満たす x は $3\times3^k=3^{k+1}$ 【個】ある。

したがって，$n=k+1$ のときも $(*)$ は正しい。

以上 (Ⅰ)，(Ⅱ) より $n=1,2,3,\cdots\cdots$ で $(*)$ は正しい。

ゆえに $n=3,4,5,\cdots\cdots$ に対して $f_n(x)=0$ を満たす実数 x の個数は 3^n である。

【戦略２】(3) について

$|x|>2$ のとき，$|f_1(x)|=|x^3-3x|\geqq|x^3|-|3x|=|x|(|x|^2-3)>2\cdot1=2$
より，帰納的に $|f_n(x)|>2$ となるため，$f_n(x)=0$ となる x は存在しません。

つまり，$f_n(x)=0$ の解はすべて $|x|\leqq2$ の範囲にあることになります。

したがって，$x=2\cos\theta\ (0\leqq\theta\leqq\pi)$ と表せます。

（この一連の種明かしは後で解説します）

$f_1(2\cos\theta)=(2\cos\theta)^3-3(2\cos\theta)=2(4\cos^3\theta-3\cos\theta)=2\cos3\theta$

$f_2(2\cos\theta)=f_1(2\cos3\theta)=2\cos9\theta$

以後帰納的に $f_n(2\cos\theta)=2\cos3^n\theta$ となりますから

$f_n(x)=0$ という x についての方程式は $x=2\cos\theta\ (0\leqq\theta\leqq\pi)$ という置換によって，$2\cos3^n\theta=0$ という θ の方程式に帰着します。

$0\leqq\theta\leqq\pi$ という設定にしたのは，x と θ が 1 対 1 対応するようにしたかったからです。

別解

$|x|>2$ のとき，

$$|f_1(x)|=|x^3-3x|\geqq|x^3|-|3x|=|x|(|x|^2-3)>2\cdot1=2$$

より，帰納的に $|f_n(x)|>2$ となるため，$f_n(x)=0$ となる x は存在しない。

以後 $|x|\leqq2$ で考える。 このとき，$x=2\cos\theta$ ($0\leqq\theta\leqq\pi$) とおける。

$f_1(2\cos\theta)=(2\cos\theta)^3-3(2\cos\theta)=2(4\cos^3\theta-3\cos\theta)=2\cos3\theta$

$f_2(2\cos\theta)=f_1(2\cos3\theta)=2\cos9\theta$

以後帰納的に $f_n(2\cos\theta)=2\cos3^n\theta$ となる．

よって $f_n(x)=0\ \cdots(*) \iff \cos3^n\theta=0\ \cdots(*)'$

このとき，$3^n\theta=\dfrac{\pi}{2}+m\pi$ ($m=0,1,2,\cdots$)

今 $0\leqq\theta\leqq\pi$ より，$0\leqq3^n\theta\leqq3^n\pi$ だから $0\leqq\dfrac{\pi}{2}+m\pi\leqq3^n\pi$

これを満たす非負整数 m は $m=0,1,2,\cdots\cdots3^{n-1}$ の 3^n 個ある。

つまり，$(*)'$ を満たす θ は 3^n 個ある。

各々の θ に対して，$x=2\cos\theta$ という置換による x は $(*)$ を満たしている。

$0\leqq\theta\leqq\pi$ より，x と θ は 1 対 1 対応するので，$(*)$ の実数解の個数は 3^n であり，題意は示された。

【総括】

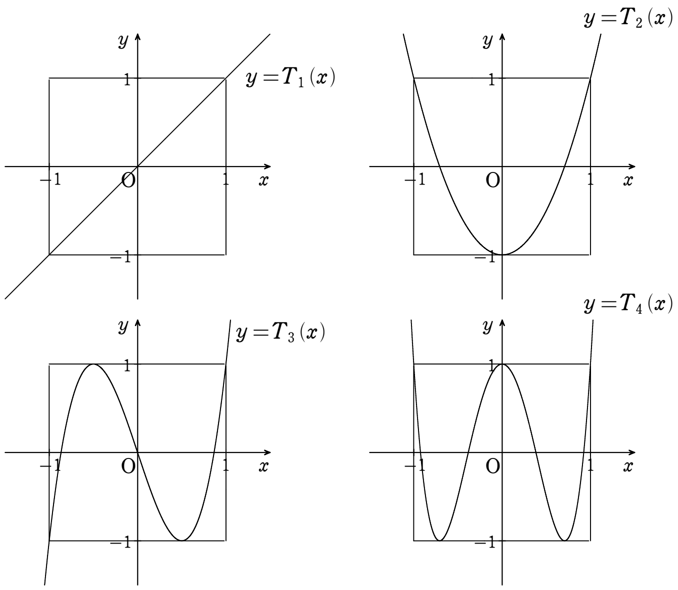
解答 は，チェビシェフの多項式に関する知識を抜きにしたものです。

具体例による実験によって，一般論を考察するという大切な考え方です。

確かに 別解 は量的にもシンプルに解決します。だからと言って，解答 の方針をバカにはしてほしくはありません。

それを踏まえた上で，別解 の種明かしをします。

チェビシェフの多項式 $T_n(x)$ の特徴としては

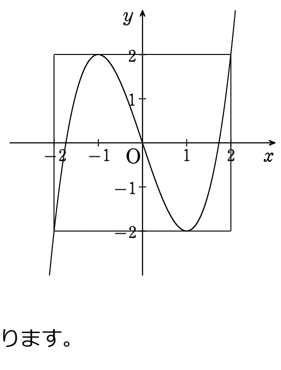


というように，$y=T_n(x)$ のグラフは，$|x|=1$，$|y|=1$ で作られる正方形に収まるという性質をもっています。

これは『チェビシェフの多項式４』で扱った内容です。

この「正方形に収まる」という性質は，チェビシェフの多項式を意識する大きなきっかけになるということでした。

さて，本問における，$y=x^3-3x$ というグラフは



という正方形に収まります。

これを見てピンとこないでしょうか？

前回の『チェビシェフの多項式５』で扱った「変形チェビシェフの多項式」です。

おさらいしておくと

変形チェビシェフの多項式 $\tilde{T}_n(x)$ は $2\cos n\theta=\tilde{T}_n(2\cos\theta)$ を満たすような多項式 $\tilde{T}_n(x)$ のことであり，$\tilde{T}_n(2x)=2T_n(x)$ という関係式を考えることで得たものでした。

$\tilde{T}_n(2x)=2T_n(x)$ という関係式は，$\tilde{T}_n(x)=2T_n\left(\dfrac{x}{2}\right)$ であることを意味しますから，これを用いて具体的に $\tilde{T}_n(x)$ を羅列していくと

$$\tilde{T}_0(x)=2T_0\left(\frac{x}{2}\right)=2 \quad (\because T_0(x)=1)$$

$$\tilde{T}_1(x)=2T_1\left(\frac{x}{2}\right)=x \quad (\because T_1(x)=x)$$

$$\tilde{T}_2(x)=2T_2\left(\frac{x}{2}\right)=2\cdot\left\{2\cdot\frac{x^2}{4}-1\right\}=x^2-2 \quad (\because T_2(x)=2x^2-1)$$

$$\tilde{T}_3(x)=2T_3\left(\frac{x}{2}\right)=2\cdot\left\{4\cdot\frac{x^3}{8}-\frac{3x}{2}\right\}=x^3-3x \quad (\because T_3(x)=4x^3-3x)$$

$$\vdots$$

というようになります。

もうお分かりだと思いますが，今回の元となる x^3-3x という関数は $\tilde{T}_3(x)$ だったのです。

当然 $x=2\cos\theta$ という置換によって，うまく話が進んでいくことになるわけです。

【復習用問題】

多項式 $f_1(x)$ を $f_1(x)=x^2-2$ と定め，

$$f_{n+1}(x)=f_n(x^2-2) \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

によって $f_2(x)$，$f_3(x)$ …… を順次定めていく。実数 a が $-2<a<2$ を満たすとき，方程式 $f_n(x)=a$ は相異なる実数解をちょうど 2^n 個もち，いずれも $-2<x<2$ の範囲にあることを示せ。

＜ '04 千葉大 ＞

【略解】

$|x|\geqq 2$ のとき，$|f_1(x)|=|x^2-2|\geqq|x^2|-|2|\geqq 2$ より，帰納的に

$$|f_n(x)|\geqq 2$$

となり，$|a|<2$ のとき $f_n(x)=a$ となる実数 x は存在しないため，題意の方程式の解は $-2<x<2$ を満たしている。

あとは個数が 2^n 個であることを示せばよい。

$-2<x<2$ を満たす x は $x=2\cos\theta$ $(0<\theta<\pi)$ とおけ，

$$f_n(x)=2\cos 2^n\theta$$

よって題意の方程式の実数解の個数は $\cos 2^n\theta=\dfrac{a}{2}$ …(*) の

$0<2^n\theta<2^n\pi$ における θ の個数でこれを満たす θ は 2^n 個

(∵ 動径が 1 周するごとに (*) をみたす θ は 2 つあり，動径は 2^{n-1} 周するため)

したがって題意は示された。

【復習用問題　総括】

同じ 2004 年度にご近所の東大と千葉大で同じ背景をもつ同じオチの問題が出題されていました。

もちろん，千葉大の問題でテーマになっているのは

$$\text{変形チェビシェフの多項式 } \tilde{T}_2(x)=x^2-2$$

です。

＜余談＞

そういえば前回の『チェビシェフの多項式 5』で扱った問題の出典は 2004 年度の名古屋大学でした。

2004 年に何かあったのか調べてみたら，どうやらチェビシェフの没後 110 年にあたる年だったようです。