多項式の列 $f_n(x)$ ($n=0,1,2,\cdots$) が

$f_0(x)=2,\ f_1(x)=x,\ f_n(x)=xf_{n-1}(x)-f_{n-2}(x)$ ($n=2,3,4,\cdots$)

を満たすとする。

(1) $f_n(2\cos\theta)=2\cos n\theta$ ($n=0,1,2,\cdots$) であることを示せ。

(2) $n\geqq 2$ のとき，方程式 $f_n(x)=0$ の $|x|\leqq 2$ における最大の実数解を x_n とおく。このとき，$\displaystyle\int_{x_n}^{2} f_n(x)\,dx$ の値を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2\int_{x_n}^{2} f_n(x)\,dx$ の値を求めよ。

＜ '04 名古屋大 ＞

【戦略】

(1) は漸化式で定まる関数列に関する証明ですから，手なりに数学的帰納法という手法をとりたいですね。

前２つの情報を使って次の項が出るタイプなので，前段仮定も２つ必要なタイプの帰納法でしょう。

帰納法の途中の式変形では，積和公式を活用する流れになります。
(チェビシェフの多項式おなじみの流れです。)

(2) は (1) の活用をしようという姿勢が大切です。

$f_n(x)$ そのものを具体的に表すことはできないですが，$x=2\cos\theta$ と代入すると，$f_n(2\cos\theta)=2\cos n\theta$ とスッキリと表せることから，変数変換 (置換積分) ということになります。

置換積分の際，積分範囲に一旦 α という未知数を設定することになりますが，$x_n=2\cos\alpha$ という関係式，及び x_n が $f_n(x)=0$ ，すなわち $f_n(x_n)=0$ を満たしているという関係式から，この α は将来的に n を用いて表すことができるであろうことを視野に入れながら計算を進めていきましょう。
(設定によっては自分で設定した角度 α は具体的に求めることができないことが多いのですが，今回は設問的に『$\displaystyle\int_{x_n}^{2} f_n(x)\,dx$ の値を求めよ。』とあるので，求められるのでしょう。)

(3) は (2) が出来た人へのボーナス問題で，$\dfrac{\sin\theta}{\theta}$ 型の不定形を解消するだけのご祝儀です。

解答

(1) $f_n(2\cos\theta)=2\cos n\theta$ …① が $n=0,1,2,\cdots$ で成り立つことを n に関する数学的帰納法で示す。

(i) $n=0$ のとき

$f_0(2\cos\theta)=2\ (=2\cos 0\theta)$ より，$n=0$ のとき ① は成立。

(ii) $n=1$ のとき

$f_1(2\cos\theta)=2\cos\theta\ (=2\cos 1\theta)$ より，$n=1$ のとき ① は成立。

(iii) $n=k,\ k+1$ ($k=0,1,2,\cdots$) のとき

$f_k(2\cos\theta)=2\cos k\theta$ ，$f_{k+1}(2\cos\theta)=2\cos(k+1)\theta$ であると仮定する。

このとき，$f_{k+2}(x)=xf_{k+1}(x)-f_k(x)$ より

$$\begin{aligned}
f_{k+2}(2\cos\theta)&=2\cos\theta\, f_{k+1}(2\cos\theta)-f_k(2\cos\theta)\\
&=2\cos\theta\cdot 2\cos(k+1)\theta-2\cos k\theta\\
&=4\cos\theta\cos(k+1)\theta-2\cos k\theta\\
&=4\cdot\frac{1}{2}\{\cos(k+2)\theta+\cos k\theta\}-2\cos k\theta\quad(\because\ \text{積和公式})\\
&=2\{\cos(k+2)\theta+\cos k\theta\}-2\cos k\theta\\
&=2\cos(k+2)\theta
\end{aligned}$$

となり，$n=k+2$ のときも ① は成立する。

(i), (ii), (iii) より，$n=0,1,2,\cdots$ で (*) は成立し，題意は示された。

(2) 積分区間 $x_n\leqq x\leqq 2$ において，$x=2\cos\theta$ ($0\leqq\theta\leqq\pi$) とおける。

このとき，$x_n=2\cos\alpha$ を満たす α に対して，

x	x_n	→	2
θ	α	→	0

$$\frac{dx}{d\theta}=-2\sin\theta$$

$$\begin{aligned}
(\text{与式})&=\int_{\alpha}^{0} f_n(2\cos\theta)\frac{dx}{d\theta}\,d\theta\\
&=\int_0^{\alpha} 2\cos n\theta\,(2\sin\theta)\,d\theta\quad(\because\ ①)\\
&=4\int_0^{\alpha}\cos n\theta\,\sin\theta\,d\theta\\
&=4\int_0^{\alpha}\frac{1}{2}\{\sin(n+1)\theta-\sin(n-1)\theta\}\,d\theta\quad(\because\ \text{積和公式})\\
&=2\left[-\frac{1}{n+1}\cos(n+1)\theta+\frac{1}{n-1}\cos(n-1)\theta\right]_0^{\alpha}\\
&=2\left\{\frac{1}{n-1}\cos(n-1)\alpha-\frac{1}{n+1}\cos(n+1)\alpha-\left(-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n-1}\right)\right\}
\end{aligned}$$

ここで，$f_n(x_n)=0$ なので，$f_n(2\cos\alpha)=0$

① より，$2\cos n\alpha=0$ ，すなわち $\cos n\alpha=0$ …②

このとき，$n\alpha=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ (k は整数) で，$\alpha=\dfrac{(k+1)\pi}{2n}$

この α は $0\leqq\alpha\leqq\pi$ を満たすので，$\alpha=\dfrac{1}{2n}\pi,\ \dfrac{3}{2n}\pi,\ \cdots,\ \dfrac{2n-1}{2n}\pi$

$x_n=2\cos\alpha$ より，x_n が最大となるとき，α は最小となるので，

$$\alpha=\frac{\pi}{2n}$$

このとき，$\cos n\alpha=0$，$\sin n\alpha=1$ であるので

$$\cos(n-1)\alpha=\cos(n\alpha-\alpha)=\cos n\alpha\cos\alpha+\sin n\alpha\sin\alpha=\sin\alpha$$
$$\cos(n+1)\alpha=\cos(n\alpha+\alpha)=\cos n\alpha\cos\alpha-\sin n\alpha\sin\alpha=-\sin\alpha$$

$$\begin{aligned}(\text{与式})&=2\left\{\frac{1}{n-1}\sin\alpha+\frac{1}{n+1}\sin\alpha-\frac{2}{(n+1)(n+2)}\right\}\\&=2\left\{\frac{2n}{(n+1)(n-1)}\sin\alpha-\frac{2}{(n+1)(n+2)}\right\}\\&=\frac{4}{(n+1)(n-1)}\{n\sin\alpha-1\}\\&=\frac{4}{(n+1)(n-1)}\left(n\sin\frac{\pi}{2n}-1\right)\cdots\text{答}\end{aligned}$$

(3)

$$n^2\int_{x_n}^{2}f_n(x)\,dx=\frac{4n^2}{n^2-1}\left(n\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\cdot\frac{\pi}{2n}-1\right)$$
$$=\frac{4}{1-\frac{1}{n^2}}\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}-1\right)\to 4\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=2\pi-4$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}n^2\int_{x_n}^{2}f_n(x)\,dx=2\pi-4\ \cdots\text{答}$$

【総括】

チェビシェフの多項式を匂わせる設定ですが，$2\cos n\theta$ と，係数が 2 となっています。

本問の種明かしをします。

本家のチェビシェフの多項式を $T_n(x)$ とします。

これは前回までに学習したように $\cos n\theta=T_n(\cos\theta)$ を満たす n 次の整数係数多項式ですから

$$T_0(x)=1,\ T_1(x)=x,\ T_2(x)=2x^2-1,\ T_3(x)=4x^3-3x,\ \cdots$$

であり，漸化式 $T_{n+2}(x)=2x\,T_{n+1}(x)-T_n$ が成立しています。

ここで，『チェビシェフの多項式 2，3』で触れた内容ですが，最高次の係数は $n=1,2,\cdots$ のときに 2^{n-1} です。

つまり，$T_n(x)=2^{n-1}x^n+\cdots\cdots$ という形をしています。

指数部分を揃えるために両辺 2 倍してみると

$$2T_0(x)=2,\ 2T_1(x)=2x,\ 2T_2(x)=(2x)^2-2,\ 2T_3(x)=(2x)^3-3\cdot(2x)\cdots$$

というように，$2x$ を 1 つのカタマリとみなせるようです。

これより $2T_n(x)=\tilde{T}_n(2x)$ を満たす多項式 $\tilde{T}_n(x)$ の存在が予想されます。

これは $2T_n(\cos\theta)=\tilde{T}_n(2\cos\theta)$，すなわち

$$\tilde{T}_n(2\cos\theta)=2\cos n\theta$$

を満たす整数係数多項式 $\tilde{T}_n(x)$ の存在を示唆します。

本問の (1) はこのような $\tilde{T}_n(x)$ は

$$\tilde{T}_n(x)=x\tilde{T}_{n-1}(x)-\tilde{T}_{n-2}(x)\quad(2,3,4,\cdots)$$

という漸化式で作れますよ，ということを主張しているわけです。

逆に，$\tilde{T}_n(2\cos\theta)=2\cos n\theta$ が成立するときに，$\tilde{T}_n(x)$ が満たす漸化式を作りたいとなったら，$T_{n+2}(x)=2x\,T_{n+1}(x)-T_n(x)$ という漸化式を基にすればいいでしょう。

この漸化式を辺々 2 倍すれば $2T_{n+2}(x)=4x\,T_{n+1}(x)-2T_n(x)$

$\tilde{T}_n(2x)=2T_n(x)$ ですから，$\tilde{T}_{n+2}(2x)=2x\tilde{T}_{n+1}(2x)-\tilde{T}_n(2x)$ を得ます。

$2x=X$ などとおけば，$\tilde{T}_n(X)=X\tilde{T}_{n+1}(X)-\tilde{T}_n(X)$

という本問の $f_n(x)$ と同じ構造の漸化式になりましたね。

また，$\tilde{T}_n(2x)=2T_n(x)$ という関係式は，$\tilde{T}_n(x)=2T_n\left(\frac{x}{2}\right)$ ということを意味します。このように，この $\tilde{T}_n(x)$ は $T_n(x)$ からも作ることができます。

この $\tilde{T}_n(x)$ を次回以降「変形チェビシェフの多項式」と呼んでいくことにします。