次の連立方程式を考える。

$$(*)\quad \begin{cases} y=2x^2-1 \\ z=2y^2-1 \\ x=2z^2-1 \end{cases}$$

(1) $(x, y, z)=(a, b, c)$ が $(*)$ の実数解であるとき，

$$|a|\leqq 1,\ |b|\leqq 1,\ |c|\leqq 1$$

であることを示せ。

(2) $(*)$ は全部で８組の相異なる実数解をもつことを示せ。

＜ '97 京都大 ＞

【戦略】

$f(X)=2X^2-1$ **に対して，** $y=f(x)$，$z=f(f(x))$，$x=f(f(f(x)))$

というある意味合成関数的な構成をしています。

$a_{n+1}=f(a_n)$ **の形で定まっていくような数たちを視覚化する際には**

$Y=X$ **という直線を添えて図に書いて把握していくのが鉄板です。**

a，b，c **には対称性がありますから，**$|a|\leqq 1$ **であることが示せれば，同様にして** $|b|\leqq 1$，$|c|\leqq 1$ **も示せることになります。**

なので，$|a|\leqq 1$ **を示すことに注力します。**

もし a **が** $a>1$ **とかの場所からスタートするとするとどうなるかということを，視覚化という形で目で追っていけます。**

$a>1$ **だと，**$a<f(a)<f(f(a))<f(f(f(a)))<\cdots\cdots$ **と** f **を施せば施すほど大きくなっていきます。**

３回 f **を施して自分自身に戻ってこなければいけないので，それはおかしいですね。**

$a<-1$ **からスタートしても，**$f(a)>1$ **となるため，そこから** f **を施し続ければ**

$f(a)<f(f(a))<f(f(f(a)))<\cdots$ **となり，やはり矛盾します。**

(2) **は直接的には** $x=f(f(f(x)))$ **という方程式の実数解ということになり，具体的には８次方程式となります。**

８次方程式だからといって，$-1\leqq x\leqq 1$ **の範囲に８個の相異なる実数解をもっているかどうかの保証はないので，そのあたりをどう解決するかです。**

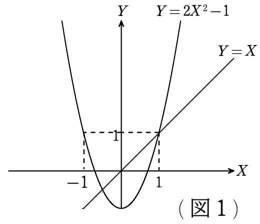
（チェビシェフの多項式という背景は抜きにしてゴリゴリに解くとなると）

引き続き視覚化で処理をするのが妥当でしょうか。

ただし，まともに（８次式）$=0$ を相手にするのではなく，相手にすべき方程式の左辺と右辺については選びたいと思います。

解答

(1) 条件より $\begin{cases} b=2a^2-1 \\ c=2b^2-1 \\ a=2c^2-1 \end{cases}$



今，$Y=2X^2-1$ と $Y=X$ のグラフは（図１）のようになる。

（図１）

（図１）より，$X>1$ を満たす X に対して $2X^2-1>X$ … ①

$X<-1$ を満たす X に対して $2X^2-1>1$ … ②

さて，$a>1$ と仮定すると，①より $2a^2-1>a$，すなわち $b>a\ (>1)$

これより $b>1$ であるから ① を考えると $2b^2-1>b$，すなわち $c>b\ (>1)$

これより $c>1$ を得て ① を考えると $2c^2-1>c$，すなわち $a>c$

以上から $a<b<c<a$ となり矛盾する．ゆえに $a\leqq 1$ である。

一方，$a<-1$ と仮定すると，②より $2a^2-1>1$，すなわち $b>1$

これより $b>1$ であるから ① を考えると $2b^2-1>b$，すなわち $c>b$

これより $c>1$ を得て ① を考えると $2c^2-1>c$，すなわち $a>c$ となり $a>1$ で仮定に矛盾する。

ゆえに $a\geqq -1$ である。

以上より $|a|\leqq 1$ が成立する。

$|b|\leqq 1$，$|c|\leqq 1$ も同様にして成立する。

(2) $y=2x^2-1$，及び $z=2y^2-1$ より，

$$\begin{aligned} z&=2(2x^2-1)^2-1 \\ &=8x^4-8x^2+1 \end{aligned}$$

を得る。

一方，$x=2z^2-1$ を満たしている。

よって，２つの曲線 $\begin{cases} z=8x^4-8x^2+1 & \cdots③ \\ x=2z^2-1 \end{cases}$ の共有点の x 座標が $(*)$ を満たす x である。

③ は偶関数であるので，$0\leqq x\leqq 1$ の範囲で増減表をつくる。

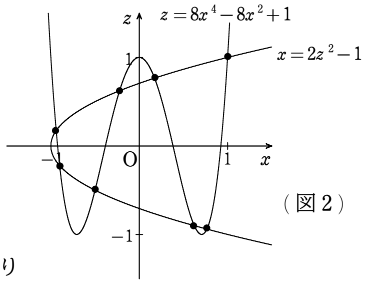
$\dfrac{dz}{dx}=32x^3-16x=16x(2x^2-1)$ より，

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$\frac{dz}{dx}$	0	$-$	0	$+$	
z	1	↘	-1	↗	1

③ のグラフは z 軸対称
であることに注意すると

2 曲線 $\begin{cases} z=8x^4-8x^2+1 \\ x=2z^2-1 \end{cases}$

のグラフは (図 2) のようになり



(図 2)

共有点は 8 個でこれらは全て相異なり
$-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲に存在する。

ゆえに，題意は示された。

実をいうとこの 2 曲線は

$z=T_4(x)$

$x=T_2(z)$

です。

<コメント>

正直この方針なら (1) も同時に片付いていたことになります。

【 (2) 戦略２】

本問で扱う $2x^2-1$ という関数は，チェビシェフの多項式 $T_2(x)$ です。

（これに気が付くためのシグナルについては【総括】でお話しします。）

そこに気が付けば，(1) から $-1 \leqq a \leqq 1$ であることを示しているため，堂々と $a=\cos\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とおくことで，

$b=2a^2-1=2\cos^2\theta-1=\cos 2\theta$

$c=2b^2-1=2\cos^2 2\theta-1=\cos 4\theta$

倍返しだ！

$a=2c^2-1=2\cos^2 4\theta-1=\cos 8\theta$

と次々と２倍角の公式によって得られていき

$$\cos 8\theta=\cos\theta$$

という方程式を得ます。

これについては「中身比べ型」で倒せばよいでしょう。

(2) 別解

(1) より (*) の解 (a, b, c) について $|a| \leqq 1$ だから

$$a=\cos\theta \ (0 \leqq \theta \leqq \pi)$$

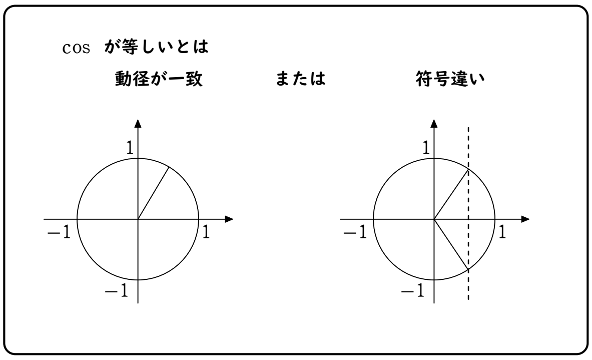
とおける。

このとき，$b=2a^2-1=2\cos^2\theta-1=\cos 2\theta$
$c=2b^2-1=2\cos^2 2\theta-1=\cos 4\theta$
$a=2c^2-1=2\cos^2 4\theta-1=\cos 8\theta$

ゆえに

$$\cos 8\theta=\cos\theta$$

これより $8\theta=\theta+2m\pi$，または $8\theta=-\theta+2n\pi$ （m，n は整数）となる。



すなわち $\theta=\dfrac{2m}{7}\pi$，または $\theta=\dfrac{2n}{9}\pi$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より $\theta=0, \dfrac{2}{7}\pi, \dfrac{4}{7}\pi, \dfrac{6}{7}\pi, \dfrac{2}{9}\pi, \dfrac{4}{9}\pi, \dfrac{6}{9}\pi, \dfrac{8}{9}\pi$
これら 8 個の θ に対応する a の値は全て異なる。

ゆえに (*) の実数解 (a, b, c) の組は全部で 8 組となる。

【総括】

チェビシェフの多項式についての背景を知らないものとした場合の路線は $\boxed{\text{解答}}$ で示したような路線かなと思います。

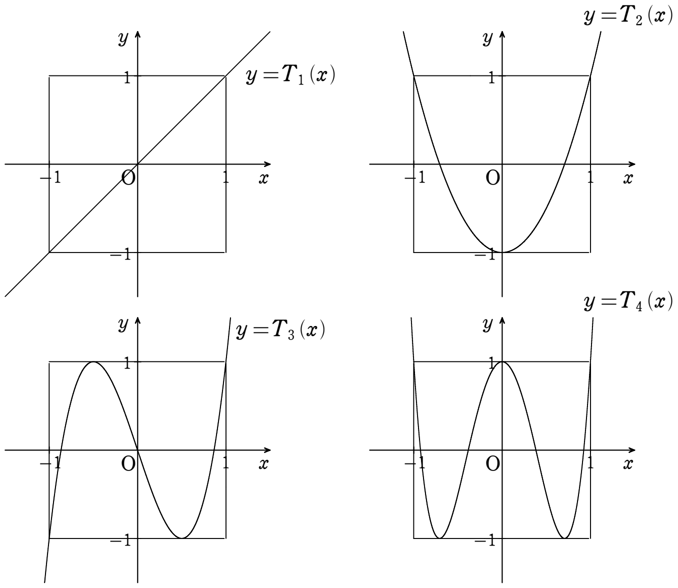
視覚化すれば (1)，(2) は同時に片付くのですが，$Y=X$ という直線を添えることで，$a_{n+1}=f(a_n)$ という合成写像の像のふるまいを見るという手法は，それはそれで大切ですので，あえて載せておきました。

さて，本シリーズのチェビシェフの多項式についてです。

今まで，$\cos n\theta=T_n(\cos\theta)$ のようなチェビシェフの多項式を匂わせるキーワードがあったと思いますが，本問はそれほど匂いが強くありません。

チェビシェフの多項式を意識するきっかけは，視覚化する際に使ったグラフです。

チェビシェフの多項式 $T_n(x)$ について，$y=T_n(x)$ の特徴として



というように，$y=T_n(x)$ のグラフは，$|x|=1$，$|y|=1$ で作られる正方形に収まるという性質をもっています。

これは $-1\leqq x\leqq 1$ の範囲において $x=\cos\theta$ という置換により

$$T_n(x)=T_n(\cos\theta)=\cos n\theta$$

であることから，$-1\leqq y\leqq 1$ に収まります。

さらに，

n が奇数のとき，$y=T_n(x)$ のグラフは必ず $(1,\ 1)$，$(-1,\ -1)$ を通る

n が偶数のとき，$y=T_n(x)$ のグラフは必ず $(1,\ 1)$，$(-1,\ 1)$ を通る

ということが言えます。

（証明）

奇関数・偶関数については
「チェビシェフの多項式２」で触れました

n が奇数のとき，$y=T_n(x)$ は奇関数で原点対称のグラフ，n が偶数のとき，$y=T_n(x)$ は偶関数で y 軸対称のグラフであることから，

$y=T_n(x)$ が $(1,\ 1)$ を必ず通る

ということが言えれば十分である。

$T_n(\cos\theta)=\cos n\theta$ において，$\theta=0$ を代入すれば，$T_n(1)=1$ を得る。

これは $y=T_n(x)$ が n の値によらず必ず $(1,\ 1)$ を通ることを意味する。

（証明終了）

また，$T_n(x)=0$ を満たす x について，$-1\leqq x\leqq 1$ の範囲で探すと $x=\cos\theta$（$0\leqq\theta\leqq\pi$）とおくことで，$\cos n\theta=0$ を考えることになります。

これより，$n\theta=\dfrac{2m-1}{2}\pi$，すなわち $\theta=\dfrac{2m-1}{2n}\pi$ を得ます。

$0\leqq\theta\leqq\pi$ なので，$0\leqq\dfrac{2m-1}{2n}\pi\leqq\pi$，すなわち $0\leqq\dfrac{2m-1}{2n}\leqq 1$

これを満たす整数 m は $m=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ の n 個ありますから

$\theta=\dfrac{1}{2n}\pi,\ \dfrac{3}{2n}\pi,\ \dfrac{5}{2n}\pi,\ \cdots\cdots,\ \dfrac{2n-1}{2n}\pi$ を得ることになります。

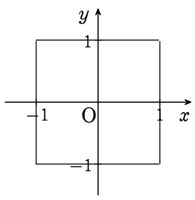
ゆえに，$T_n(x)=0$ の解は

$$\cos\frac{\pi}{2n},\ \cos\frac{3\pi}{2n},\ \cos\frac{5\pi}{2n},\ \cdots\cdots,\ \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}$$

という n 個となり，$-1\leqq x\leqq 1$ の範囲に全てあることが分かります。

『チェビシェフの多項式２』で，$T_n(x)$ が n 次式であることは触れています。$T_n(x)=0$ という n 次方程式の解は n 個あることを考えると，この n 個で全てです。

まとめると

・$y=T_n(x)$ のグラフは  という正方形に収まる

・n が奇数のとき $(1,\ 1)$，$(-1,\ -1)$ を必ず通る
・n が偶数のとき $(1,\ 1)$，$(-1,\ 1)$ を必ず通る

・$T_n(x)=0$ という n 次方程式は $-1\leqq x\leqq 1$ の範囲に相異なる n 個の実数解をもつ

特に正方形に収まるという特徴はチェビシェフの多項式を意識する大きなきっかけになります。