$n$ は自然数とする。

(1)　すべての実数 $\theta$ に対し

$$\cos n\theta = f_n(\cos\theta),\ \sin n\theta = g_n(\cos\theta)\sin\theta$$

をみたし，係数がともにすべて整数である $n$ 次式 $f_n(x)$ と $n-1$ 次式 $g_n(x)$ が存在することを示せ。

(2)　$f_n{}'(x) = n g_n(x)$ であることを示せ。

(3)　$p$ を３以上の素数とするとき，$f_p(x)$ の $p-1$ 次以下の係数はすべて $p$ で割り切れることを示せ。

＜ '96 京都大 ＞

**【戦略】**

**（まずはチェビシェフの多項式についての背景的なものを抜きで話をします。）**

**手なりに** (1) **を示そうと思うと，やはり数学的帰納法でしょう。**

$n=1$ **のときは題意が正しいことはすぐ証明できます。**

$n=k$ **のときに** $\begin{cases} \cos k\theta = f_k(\cos\theta) \\ \sin k\theta = g_k(\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$ **となる**

$f_k(x)$（**整数係数** $k$ **次多項式**），$g_k(x)$（**整数係数** $k-1$ **次多項式**）**が存在すると仮定します。**

**このとき，加法定理から**

$$\begin{aligned}\cos(k+1)\theta &= \cos k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta \\ &= f_k(\cos\theta)\cos\theta - g_k(\cos\theta)\sin\theta\ \sin\theta \\ &= f_k(\cos\theta)\cos\theta - g_k(\cos\theta)(1-\cos^2\theta) \\ &= f_k(\cos\theta)\cos\theta + g_k(\cos\theta)\cos^2\theta - g_k(\cos\theta) \\ &= x f_k(x) + x^2 g_k(x) - g_k(x)\quad (x=\cos\theta \text{ と置換}) \\ &= (k+1\text{ 次式}) + (k+1\text{ 次式}) - (k-1\text{ 次式})\end{aligned}$$

**となりますが，これで** $=(k+1$ 次式$)$ **というわけにはいきません。**

**最高次の** $x^{k+1}$ **の係数が打ち消しあってしまう可能性を否定しなければならないからです。**

**そこで，「最高次の係数」に注目して実験をしてみると**

$\cos 1\theta = \cos\theta$ **なので，** $f_1(x) = x$

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ **なので，** $f_2(x) = 2x^2 - 1$

$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ **なので，** $f_3(x) = 4x^3 - 3x$

$$\begin{aligned}\cos 4\theta &= 2\cos^2 2\theta - 1 \\ &= 2(2\cos^2\theta - 1)^2 - 1 \\ &= 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1\end{aligned}$$

**なので，** $f_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$

$\sin 1\theta = \sin\theta$ **なので，** $g_1(x) = 1$

$\sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta$ **なので，** $g_2(x) = 2x$

$$\begin{aligned}\sin 3\theta &= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \\ &= \sin\theta\{3 - 4(1-\cos^2\theta)\} \\ &= (4\cos^2\theta - 1)\sin\theta\end{aligned}$$

**なので，** $g_3(x) = 4x^2 - 1$

**ですから，** $f_n(x)$，$g_n(x)$ **の最高次の係数はともに** $2^{n-1}$ **と予想できます。**

**（前回の『チェビシェフの多項式２』の中で最高次の係数については触れていますが，とりあえずその背景的知識を抜きにして考えています。）**

**そこで「** $f_n(x)$，$g_n(x)$ **の最高次の係数はともに** $2^{n-1}$ **」であることも含めて数学的帰納法で示すことにします。**

(2) **は** $f_n(\cos\theta) = \cos n\theta$ **の両辺を** $\theta$ **で微分すればよいでしょう。**

(3) **は** $f_p(x) = 2^{p-1}x^p + a_{p-1}x^{p-1} + a_{p-2}x^{p-2} + \cdots + a_1 x + a_0$ **とおきます。**

(2) **より，** $f_p{}'(x) = p\,g_p(x)$ **であり，** $f_p{}'(x)$ **の係数は全て** $p$ **の倍数ということになります。**

**これより**

$$(p-1)a_{p-1},\ (p-2)a_{p-2},\ \cdots,\ 2a_2,\ a_1$$

**は全て** $p$ **の倍数ということになります。**

**しかし，** $p$ **は奇素数であることから，** $p-1$，$p-2$，$\cdots$，$1$ **は全て** $p$ **と互いに素であるので，** $a_{p-1}$，$a_{p-2}$，$\cdots$，$a_2$，$a_1$ **が** $p$ **の倍数となっていなければなりません。**

**残る定数項** $a_0$ **についてですが，** $f_p(\cos\theta) = \cos p\theta$ **に** $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ **を代入すれば，** $f_p(0) = \cos\dfrac{p\pi}{2} = 0$ **を得るため，** $a_0 = 0$ **で，これも** $p$ **の倍数です。**

**（前回の『チェビシェフの多項式２』を学習していれば，** $p$ **が奇素数であることから，** $f_p(x)$ **は奇関数であり，定数項は** $0$ **であるという見方もできるかもしれません。ただ，少し大袈裟かなと思います。）**

解答

(1)　任意の自然数 $n$ に対して

$$\cos n\theta = f_n(\cos\theta),\ \frac{\sin n\theta}{\sin\theta} = g_n(\cos\theta)$$

となる整数係数の $n$ 次式 $f_n(x)$ と，整数係数の $n-1$ 次式 $g_n(x)$ が存在し，$f_n(x)$，$g_n(x)$ の最高次の係数がともに $2^{n-1}$ である… (*)

ということを $n$ についての数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1$ のとき

$\cos 1\theta = \cos\theta$ より，$f_1(x)=x$ (最高次の係数が $2^{1-1}$ の 1 次式)

$\sin 1\theta = 1\cdot\sin\theta$ より，$g_1(x)=1$ (最高次の係数が $2^{1-1}$ の 0 次式)

となり，(*) は正しい。

(ii)　$n=k\ (k=1,2,\cdots)$ のとき

$$\cos k\theta = f_k(\cos\theta),\ \frac{\sin k\theta}{\sin\theta} = g_k(\cos\theta)$$

となる整数係数の $k$ 次式 $f_k(x)$ と，整数係数の $k-1$ 次式 $g_k(x)$ が存在し，$f_k(x)$，$g_k(x)$ の最高次の係数がともに $2^{k-1}$ であると仮定する。

$$\begin{aligned}\cos(k+1)\theta &= \cos k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta\\ &= f_k(\cos\theta)\cos\theta - g_k(\cos\theta)\sin\theta\ \sin\theta\\ &= f_k(\cos\theta)\cos\theta - g_k(\cos\theta)(1-\cos^2\theta)\\ &= f_k(\cos\theta)\cos\theta + g_k(\cos\theta)\cos^2\theta - g_k(\cos\theta)\\ &= xf_k(x)+x^2g_k(x)-g_k(x)\quad (x=\cos\theta \text{ と置換})\ \cdots\ ①\\ &= (k+1\text{ 次式})+(k+1\text{ 次式})-(k-1\text{ 次式})\end{aligned}$$

ここで，帰納法の仮定より，

$xf_k(x)$ の $x^{k+1}$ の係数は $2^{k-1}$

$x^2g_k(x)$ の $x^{k+1}$ の係数は $2^{k-1}$

よって，① の $x^{k+1}$ の係数は $2^{k-1}+2^{k-1}=2^k$ であり

$\cos(k+1)\theta = f_{k+1}(\cos\theta)$ と表したとき，$f_{k+1}(x)$ は最高次の係数が $2^k$ であるような整数係数 $k+1$ 次式である。

一方

$$\begin{aligned}\sin(k+1)\theta &= \sin k\theta\cos\theta + \cos k\theta\sin\theta\\ &= g_k(\cos\theta)\sin\theta\ \cos\theta + f_k(\cos\theta)\sin\theta\\ &= \{g_k(\cos\theta)\cos\theta + f_k(\cos\theta)\}\sin\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta} &= xg_k(x)+f_k(x)\quad (x=\cos\theta \text{ と置換})\ \cdots\ ②\\ &= (k\text{ 次式})+(k\text{ 次式})\end{aligned}$$

ここで，帰納法の仮定より，

$xg_k(x)$ の $x^k$ の係数は $2^{k-1}$

$f_k(x)$ の $x^k$ の係数は $2^{k-1}$

よって，② の $x^k$ の係数は $2^{k-1}+2^{k-1}=2^k$ であり

$\dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta} = g_{k+1}(\cos\theta)$ と表したとき，$g_{k+1}(x)$ は最高次の係数が $2^k$ であるような整数係数 $k$ 次式である。

よって，$n=k+1$ のときも (*) は正しい。

(i)，(ii) より，$n=1,2,3,\cdots$ に対して (*) が正しいことが示され，題意も示された。

(2)　$f_n(\cos\theta)=\cos n\theta$ の両辺を $\theta$ で微分すると

$f_n{}'(\cos\theta)(-\sin\theta)=(-\sin n\theta)\cdot n$

$$\begin{aligned}f_n{}'(\cos\theta) &= n\cdot\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\\ &= n\,g_n(\cos\theta)\end{aligned}$$

これより，$f_n{}'(x)=n\,g_n(x)$ が成立する。

(3)　$a_0,a_1,a_2,\cdots,a_{p-1}$ はすべて整数として

$$f_p(x)=2^{p-1}x^p+a_{p-1}x^{p-1}+a_{p-2}x^{p-2}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$$

とおく。

$$f_p{}'(x)=p\cdot2^{p-1}x^{p-1}+(p-1)a_{p-1}x^{p-2}+(p-2)a_{p-2}x^{p-3}+\cdots+2a_2x+a_1$$

一方，(2) より $f_p{}'(x)=p\,g_p(x)$ であり，(1) より，$g_p(x)$ の係数は全て整数であることから，$f_p{}'(x)$ の係数は全て $p$ の倍数である。

これより

$$(p-1)a_{p-1},\ (p-2)a_{p-2},\ \cdots\cdots,\ 2a_2,\ a_1$$

は全て$p$ の倍数である。

$p$ は奇素数であることから，$p-1$，$p-2$，……，2 は全て $p$ と互いに素である。

ゆえに，$a_{p-1}$，$a_{p-2}$，……，$a_2$，$a_1$ が $p$ の倍数とならなければならない。

また，$f_p(\cos\theta)=\cos p\theta$ であり，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ を代入すると

$$\begin{aligned}f_p(0) &= \cos\frac{p\pi}{2}\\ &= 0\ (\because\ p \text{ は奇素数})\end{aligned}$$

$f_p(0)=a_0$ なので，$a_0=0$ となり，$a_0$ も $p$ の倍数である。

以上から，$a_{p-1}$，$a_{p-2}$，……，$a_2$，$a_1$，$a_0$は全て $p$ の倍数である。

これは，$f_p(x)$ の $p-1$ 次以下の係数が全て $p$ で割り切れるということを意味しており，題意は示された。

**【戦略２】(1) について**

**最高次の係数に触れることなく，帰納法で示すとなると**

$$\begin{cases}\cos(n+2)\theta+\cos n\theta=2\cos(n+1)\theta\cos\theta\\ \sin(n+2)\theta+\sin n\theta=2\sin(n+1)\theta\cos\theta\end{cases}$$

**という和積公式を利用していきます。**

**第２式は** $\dfrac{\sin(n+2)\theta}{\sin\theta}+\dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta}=2\cos\theta\ \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$

**となりますから**

$$\begin{cases}f_{n+2}(x)+f_n(x)=2x\,f_{n+1}(x)\\ g_{n+2}(x)+g_n(x)=2x\,g_{n+1}(x)\end{cases}$$

**と，加法定理の方針と違って，$f$ だけ，$g$ だけの漸化式を得ることになります。**

別解

任意の自然数 $n$ に対して

$$\cos n\theta=f_n(\cos\theta),\ \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}=g_n(\cos\theta)$$

となる整数係数の $n$ 次式 $f_n(x)$ と，整数係数の $n-1$ 次式 $g_n(x)$ が存在する。… (**)

積和公式より

$$\begin{cases}\cos(n+2)\theta+\cos n\theta=2\cos(n+1)\theta\cos\theta\\ \sin(n+2)\theta+\sin n\theta=2\sin(n+1)\theta\cos\theta\end{cases}$$

特に，第 2 式は

$$\frac{\sin(n+2)\theta}{\sin\theta}+\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}=2\cos\theta\ \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

となるため，

$$\begin{cases}f_{n+2}(x)+f_n(x)=2x\,f_{n+1}(x)\\ g_{n+2}(x)+g_n(x)=2x\,g_{n+1}(x)\end{cases}$$

を得る。

(i)　$n=1$ のとき

$\cos 1\theta=\cos\theta$ より，$f_1(x)=x$ ( 整数係数の 1 次式 )

$\sin 1\theta=1\cdot\sin\theta$ より，$g_1(x)=1$ ( 整数係数の 0 次式 )

となり，(**) は正しい。

(ii)　$n=2$ のとき

$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$ より，$f_2(x)=2x^2-1$ ( 整数係数の 2 次式 )

$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ より，$\dfrac{\sin 2\theta}{\sin\theta}=2\cos\theta$ であり，$g_2(x)=2x$

( 整数係数の 1 次式 )

となり，(**) は正しい。

(iii)　$n=k,\ k+1$ ( $k=1,\ 2,\ \cdots$ ) のとき

$$\cos k\theta=f_k(\cos\theta),\ \frac{\sin k\theta}{\sin\theta}=g_k(\cos\theta)$$

$$\cos(k+1)\theta=f_{k+1}(\cos\theta),\ \frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}=g_{k+1}(\cos\theta)$$

となるような

整数係数の $k$ 次式 $f_k(x)$，整数係数の $k-1$ 次式 $g_k(x)$
整数係数の $k+1$ 次式 $f_{k+1}(x)$，整数係数の $k$ 次式 $g_{k+1}(x)$

が存在すると仮定する。

$$\begin{cases}f_{k+2}(x)+f_k(x)=2x\,f_{k+1}(x)\\ g_{k+2}(x)+g_k(x)=2x\,g_{k+1}(x)\end{cases}\ \text{より，}\ \begin{cases}f_{k+2}(x)=2x\,f_{k+1}(x)-f_k(x)\\ g_{k+2}(x)=2x\,g_{k+1}(x)-g_k(x)\end{cases}$$

が成立し，帰納法の仮定から

$f_{k+2}(x)$ は整数係数の $k+2$ 次式，$g_{k+2}(x)$ は整数係数の $k+1$ 次式

であり，$n=k+2$ のときも (**) は正しい。

(i)，(ii)，(iii) から $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ で (**) は正しいことが示され，題意も示された。

【総括】

背景的なものを抜きにして解答は作りましたが，前回までの内容を少しでも学習していると，このネタ特有の匂いが感じられるでしょう。やはり前提としてネタを知っている方がアドバンテージがあると感じざるを得ません。（いいか悪いかは別として）

さて，前回までは $\cos n\theta=T_n(\cos\theta)$ となる $T_n(x)$ について見てきました。（本問でいう $f_n(x)$ は $T_n(x)$ に相当します。）

「じゃあ $\sin n\theta$ は？」という疑問も当然出てくると思います。

そこをテーマにしているのが本問です。

$$\begin{aligned}\sin 1\theta&=\sin\theta\\ \sin 2\theta&=2\sin\theta\cos\theta\\ \sin 3\theta&=3\sin\theta-4\sin^3\theta\\ &=\sin\theta\{3-4(1-\cos^2\theta)\}\\ &=\sin\theta(4\cos^2\theta-1)\end{aligned}$$

ですから

$\dfrac{\sin 1\theta}{\sin\theta}=1$，$\dfrac{\sin 2\theta}{\sin\theta}=2\cos\theta$，$\dfrac{\sin 3\theta}{\sin\theta}=4\cos^2\theta-1$，…… のように

$\dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta}=U_{n-1}(\cos\theta)$ となる $n-1$ 次式 $U_{n-1}(x)$ が存在しそうです。

今回の $g_n(x)$ はこの $U_{n-1}(x)$（← $n-1$ 次なので添字を揃えておきました）に相当します。

この $U_{n-1}(x)$ を第２種チェビシェフの多項式と言います。