0 以上の整数 n に対して，整式 $T_n(x)$ を，$T_0(x)=1$，$T_1(x)=x$

$$T_n(x)=2x\,T_{n-1}(x)-T_{n-2}(x)\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

で定める。

(1) 0 以上の任意の整数 n に対して $\cos n\theta=T_n(\cos\theta)$ となることを示せ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}T_n(x)\,dx$ を求めよ。

＜ '15 千葉大 ＞

【戦略】

（まずはチェビシェフの多項式という背景的なものを抜きにした前提での話をします。）

(1) **漸化式によって定まっていくことを考えると，数学的帰納法が最有力方針です。**
その際にカギとなるのは

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$

という積和公式です。

(2) **この流れで $x=\cos\theta$ と置換する置換積分は思いつきたいところです。**

その後の積分計算においても積和公式

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$$

が決め手になります。

$\boxed{\text{解答}}$

(1) $\cos n\theta=T_n(\cos\theta)\ \cdots(*)$ であることを数学的帰納法で示す。

(i) $n=0,\ 1$ のとき

$\cos 0\theta=1$， $T_0(\cos\theta)=1$ なので，$\cos 0\theta=T_0(\cos\theta)$

$\cos 1\theta=\cos\theta$， $T_1(\cos\theta)=\cos\theta$ なので，$\cos 1\theta=T_1(\cos\theta)$

よって，$n=0,\ 1$ のとき $(*)$ は成立する。

(ii) $n=k,\ k+1\ (k=0,\ 1,\ \cdots)$ のとき

$$\begin{cases}\cos k\theta=T_k(\cos\theta)\\ \cos(k+1)\theta=T_{k+1}(\cos\theta)\end{cases}$$

が成立すると仮定する。

$T_{k+2}(x)=2x\,T_{k+1}(x)-T_k(x)$ であり，$x=\cos\theta$ を代入すると

$$\begin{aligned}T_{k+2}(\cos\theta)&=2\cos\theta\,T_{k+1}(\cos\theta)-T_k(\cos\theta)\\&=2\cos\theta\cos(k+1)\theta-\cos k\theta\quad(\because\ \text{帰納法の仮定})\\&=2\cdot\frac{1}{2}\{\cos(k+2)\theta+\cos k\theta\}-\cos k\theta\\&=\cos(k+2)\theta\end{aligned}$$

となり，$n=k+2$ のときも $(*)$ は成立する。

(i)，(ii) より，$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ において

$$\cos n\theta=T_n(\cos\theta)$$

が成立する。

(2) $x=\cos\theta$ とおくと $\dfrac{dx}{d\theta}=-\sin\theta$

x	$-1\ \to\ 1$
θ	$\pi\ \to\ 0$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}T_n(x)\,dx&=\int_{\pi}^{0}T_n(\cos\theta)\frac{dx}{d\theta}\,d\theta\\&=\int_{\pi}^{0}\cos n\theta\,(-\sin\theta)\,d\theta\\&=\int_{0}^{\pi}\cos n\theta\sin\theta\,d\theta\\&=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\{\sin(n+1)\theta-\sin(n-1)\theta\}\,d\theta\quad(\because\ \text{積和公式})\end{aligned}$$

(Ⅰ) $n=1$ のとき

$$(\text{与式})=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\sin 2\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_{0}^{\pi}=0$$

(Ⅱ) $n=3,\ 5,\ 7,\ \cdots$ のとき

$$\begin{aligned}(\text{与式})&=\frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(n+1)\theta}{n+1}+\frac{\cos(n-1)\theta}{n-1}\right]_{0}^{\pi}\\&=\frac{1}{2}\left\{-\frac{\cos(n+1)\pi}{n+1}+\frac{\cos(n-1)\pi}{n-1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}\right\}\\&=\frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}\right\}\\&=0\end{aligned}$$

$\cos(\text{偶数})\pi=1$
です。

© MathClinic

(Ⅲ) $n=2,4,6,\cdots$ のとき

$$
\begin{aligned}
(\text{与式})&=\frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(n+1)\theta}{n+1}+\frac{\cos(n-1)\theta}{n-1}\right]_0^{\pi}\\
&=\frac{1}{2}\left\{-\frac{\cos(n+1)\pi}{n+1}+\frac{\cos(n-1)\pi}{n-1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}\right\}\\
&=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}\right\}\\
&=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}\\
&=\frac{-2}{n^2-1}
\end{aligned}
$$

$\cos(\text{奇数})\pi=-1$ です。

以上(Ⅰ),(Ⅱ),(Ⅲ) から

$$
\int_{-1}^{1}T_n(x)\,dx=\begin{cases}0 & (n\text{ が奇数のとき})\\ \dfrac{-2}{n^2-1} & (n\text{ が偶数のとき})\end{cases}\quad\cdots\text{答}
$$

【総括】

「チェビシェフの多項式１」で触れましたが

$$\cos n\theta=T_n(\cos\theta)$$

で表される多項式 $T_n(x)$ を(第１種)チェビシェフの多項式と言います。

例

$\cos1\theta=\cos\theta$ なので，$T_1(x)=x$

$\cos2\theta=2\cos^2\theta-1$ なので，$T_2(x)=2x^2-1$

$\cos3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ なので，$T_3(x)=4x^3-3x$

$$
\begin{aligned}
\cos4\theta&=2\cos^2 2\theta-1\\
&=2(2\cos^2\theta-1)^2-1 \qquad \text{なので，} T_4(x)=8x^4-8x^2+1\\
&=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1
\end{aligned}
$$

ここで，和積公式 $\cos A+\cos B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$ を利用すると，$\cos(n+2)\theta+\cos n\theta=2\cos(n+1)\theta\cos\theta$，すなわち

$$\cos(n+2)\theta=2\cos\theta\,\cos(n+1)\theta-\cos n\theta$$

を得るため，$T_{n+2}(x)=2x\,T_{n+1}(x)-T_n(x)$ という漸化式を得ます。

本問の背景の漸化式はこのように作られていることになります。

この漸化式から例えば

$T_n(x)$ は n 次式であるということ

$T_n(x)$ の x^n の係数は 2^{n-1} であるということ

などが分かります。
（いずれも数学的帰納法で証明できます。）

また，偶関数，奇関数に注目すると，この漸化式から

n が偶数のとき $T_n(x)$ は偶関数

n が奇数のとき $T_n(x)$ は奇関数

と言えます。
（ 厳密にやりたければ $T_n(-x)=(-1)^nT_n(x)$ を帰納法で示してみてください。）

こうしてみると，(2) の結果もある程度は納得がいきます。

さらにこの結果から

$$T_n(x)\text{ の定数項は }\begin{cases}0 & (n\text{ が奇数のとき})\\ (-1)^{\frac{n}{2}} & (n\text{ が偶数のとき})\end{cases}$$

ということも分かります。

（証明）

$T_n(x)$ の定数項を c_n とする。

n が奇数のときは $T_n(x)$ は奇関数なので，$c_n=0$

n が偶数のとき

$$T_{n+2}(x)=2x\,T_{n+1}(x)-T_n(x)$$

という漸化式から

$c_{n+2}=-c_n$ となり，$c_0,\ c_2,\ c_4,\ \cdots$ は初項 1，公比 -1 の等比数列である。

以上をまとめると，$T_n(x)$ について

- $T_n(x)$ は n 次式である
- $T_n(x)$ は $\begin{cases}n\text{ が偶数のとき偶関数}\\ n\text{ が奇数のとき奇関数}\end{cases}$
- $T_n(x)$ の最高次の係数は 2^{n-1}
- $T_n(x)$ の定数項は $\begin{cases}0 & (n\text{ が奇数のとき})\\ (-1)^{\frac{n}{2}} & (n\text{ が偶数のとき})\end{cases}$

などが言えます。

このようにチェビシェフの多項式に迫るにあたり

$$T_{n+2}(x)=2x\,T_{n+1}(x)-T_n(x)$$

という漸化式は大きな武器であることを実感できる問題でした。

© MathClinic