$$\cos\frac{2}{7}\pi+\cos\frac{4}{7}\pi+\cos\frac{6}{7}\pi=a\ ,\ \cos\frac{2}{7}\pi\cos\frac{4}{7}\pi\cos\frac{6}{7}\pi=b$$

とする。a と b の値を求めたい。以下の問いに答えよ。

(1) 角 θ（ラジアン）が $\cos 3\theta=\cos 4\theta$ を満たすとき，解の 1 つが $\cos\theta$ であるような 4 次の方程式を求めよ。

(2) $\theta=\frac{2}{7}\pi$ のとき，$\cos\theta$ が解の 1 つであるような 3 次の方程式を求めよ。

(3) (2) の結果を用いて，a および b の値を求めよ。

＜ '08 東京慈恵会医科大 ＞

【戦略】

(1) **左辺は 3 倍角の公式，右辺は 2 倍角の公式を 2 発使えば，$\cos\theta$ のみで表せます。**

(2) **この θ が (1) の関係式 $\cos 3\theta=\cos 4\theta$ を満たしているのでは？と，見抜ければ (1) の活用を見込めます。**
(1) の 4 次方程式は $(x-1)(8x^3+4x^2-4x-1)=0$ と因数分解できますが，$\cos\frac{2}{7}\pi$ は明らかに 1 ではありませんから，$8x^3+4x^2-4x-1=0$ の方を満たすことになり，解決です。

(3) $\theta=\frac{4}{7}\pi$，$\frac{6}{7}\pi$ **も同様では？という目で見ることができれば，話がトントン進んでいきます。**
解と係数の関係から仕留めるというオチは，(2) あたりで匂ってきてますから，シナリオについては困ることはないでしょう。

解答

(1)
$$\begin{aligned}\cos 4\theta&=2\cos^2 2\theta-1\\&=2(2\cos^2\theta-1)^2-1\\&=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1\end{aligned}$$

$$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$$

よって，$\cos 3\theta=\cos 4\theta$ を満たす θ は

$4\cos^3\theta-3\cos\theta=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1$ を満たしており，これを整理すると

$$8\cos^4\theta-4\cos^3\theta-8\cos^2\theta+3\sin\theta+1=0$$

よって，$\cos\theta$ が解の 1 つになるような 4 次方程式は

$$8x^4-4x^3-8x^2+3x+1=0\ \cdots 答$$

(2) $\theta=\frac{2}{7}\pi$ のとき，$7\theta=2\pi$ だから，$4\theta+3\theta=2\pi$

よって，

$$\begin{aligned}\cos 3\theta&=\cos(2\pi-4\theta)\\&=\cos(-4\theta)\ \ (\because\ \cos(x+2\pi)=\cos x\ )\\&=\cos 4\theta\ \ (\because\ \cos(-x)=\cos x\ )\end{aligned}$$

したがって，(1) から $\cos\frac{2}{7}\pi$ は $8x^4-4x^3-8x^2+3x+1=0$ の解である。

$$8x^4-4x^3-8x^2+3x+1=0\iff(x-1)(8x^3+4x^2-4x-1)=0$$

$\cos\frac{2}{7}\pi\neq 1$ であるから，$\cos\frac{2}{7}\pi$ は

$$8x^3+4x^2-4x-1=0 \text{ の解である。}\ \cdots 答$$

(3) $\theta=\frac{4}{7}\pi$ のとき，$4\theta+3\theta=4\pi$ より，

$$\begin{aligned}\cos 3\theta&=\cos(4\pi-4\theta)\\&=\cos(-4\theta)\ \ (\because\ \cos(x+4\pi)=\cos x\ )\\&=\cos 4\theta\ \ (\because\ \cos(-x)=\cos x\ )\end{aligned}$$

$\theta=\frac{6}{7}\pi$ のとき，$4\theta+3\theta=6\pi$ より，

$$\begin{aligned}\cos 3\theta&=\cos(6\pi-4\theta)\\&=\cos(-4\theta)\ \ (\because\ \cos(x+6\pi)=\cos x\ )\\&=\cos 4\theta\ \ (\because\ \cos(-x)=\cos x\ )\end{aligned}$$

(2) と同様に考えると，$\cos\frac{4}{7}\pi$，$\cos\frac{6}{7}\pi$ も $8x^3+4x^2-4x-1=0$ の解である。

$y=\cos x$ は $0\leqq x\leqq\pi$ の範囲で単調減少であるので

$$\cos\frac{2}{7}\pi>\cos\frac{4}{7}\pi>\cos\frac{6}{7}\pi$$

であり，$\cos\frac{2}{7}\pi$，$\cos\frac{4}{7}\pi$，$\cos\frac{6}{7}\pi$ は $8x^3+4x^2-4x-1=0$ の相異なる 3 つの実数解である。

解と係数の関係から

$$a=\cos\frac{2}{7}\pi+\cos\frac{4}{7}\pi+\cos\frac{6}{7}\pi$$
$$=-\frac{1}{2}$$

$$b=\cos\frac{2}{7}\pi\cos\frac{4}{7}\pi\cos\frac{6}{7}\pi$$
$$=\frac{1}{8}$$

$$\therefore\ a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{8}\ \cdots$$ 答

【総括】

単独では計算が不可能な三角比の値に対して，和や積ならば計算ができることを示唆する興味深い話題です。

$\cos n\theta=T_n(\cos\theta)$ の形で表される多項式 $T_n(x)$ を

（第１種）チェビシェフの多項式

と言います。

例

$\cos 1\theta=\cos\theta$ なので，$T_1(x)=x$

$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$ なので，$T_2(x)=2x^2-1$

$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ なので，$T_3(x)=4x^3-3x$

$$\begin{aligned}\cos 4\theta&=2\cos^2 2\theta-1\\&=2(2\cos^2\theta-1)^2-1\\&=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1\end{aligned}$$
なので，$T_4(x)=8x^4-8x^2+1$

本問は $T_4(x)=T_3(x)$ という方程式を利用します。

チェビシェフの多項式の作り方から，

$8x^4-8x^2+1=4x^3-3x$，すなわち $8x^4-4x^3-8x^2+3x+1=0$ … ①

という４次方程式が $x=\cos\theta$ という置換で，$\cos 4\theta=\cos 3\theta$ … ② という方程式になることを意味します。

② を満たす θ が分かれば，$x=\cos\theta$ という置換を通じて，① を満たす x が求まるということです。

① は $(x-1)(8x^3+4x^2-4x-1)=0$ と因数分解できることから，実質は $8x^3+4x^2-4x-1=0$ という３次方程式の解が求まることになります。

あとは解と係数の関係から仕留めることになります。

さらっと書きましたが，$8x^3+4x^2-4x-1=0$ という３次方程式の解が

$x=\cos\frac{2}{7}\pi$，$\cos\frac{4}{7}\pi$，$\cos\frac{6}{7}\pi$ と三角比の値で表せるということは，よくよく考えるとスゴイことです。

【復習用問題】

(1) $\cos 5\theta=f(\cos\theta)$ を満たす多項式 $f(x)$ を求めよ。

(2) $\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{10}\cos\frac{7\pi}{10}\cos\frac{9\pi}{10}=\frac{5}{16}$ を示せ。

＜ '96 京都大 ＞

【復習用問題】解答

(1)
$$\begin{aligned}\cos 5\theta&=\cos(3\theta+2\theta)\\&=\cos 3\theta\cos 2\theta-\sin 3\theta\sin 2\theta\end{aligned}$$

以下，$\sin\theta=s$，$\cos\theta=c$ と略記する。

$$\begin{aligned}\cos 5\theta&=(4c^3-3c)(2c^2-1)-(3s-4s^3)\cdot 2sc\\&=(4c^3-3c)(2c^2-1)-2s^2c(3-4s^2)\\&=(4c^3-3c)(2c^2-1)-2c(1-c^2)\{3-4(1-c^2)\}\\&=16c^5-20c^3+5c\end{aligned}$$

よって，$\cos 5\theta=16\cos^5\theta-20\cos^3\theta+5\cos\theta$

$$\therefore\ f(x)=16x^5-20x^3+5x\ \cdots$$ 答

(2) $\theta=\frac{\pi}{10}$，$\frac{3\pi}{10}$，$\frac{7\pi}{10}$，$\frac{9\pi}{10}$ のとき，$\cos 5\theta=0$ となるので

$f(\cos\theta)=0$， すなわち $16\cos^5\theta-20\cos^3\theta+5\cos\theta=0$ を満たす。

これは，$\cos\frac{\pi}{10}$，$\cos\frac{3\pi}{10}$，$\cos\frac{7\pi}{10}$，$\cos\frac{9\pi}{10}$ は $16x^5-20x^3+5x=0$，すなわち $x(16x^4-20x^2+5)=0$ の解であることを意味する。

$\cos\frac{\pi}{10}$，$\cos\frac{3\pi}{10}$，$\cos\frac{7\pi}{10}$，$\cos\frac{9\pi}{10}$ は０ではないので

４次方程式 $16x^4-20x^2+5=0$ の相異なる４つの実数解である。

$$16\left(x-\cos\frac{\pi}{10}\right)\left(x-\cos\frac{3\pi}{10}\right)\left(x-\cos\frac{7\pi}{10}\right)\left(x-\cos\frac{9\pi}{10}\right)=16x^4-20x^2+5$$

は x についての恒等式であるので，定数項を比較すれば

$$\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{10}\cos\frac{7\pi}{10}\cos\frac{9\pi}{10}=\frac{5}{16}$$

を得るため，題意は示された。

【復習用問題　総括】

シナリオは同じです。

最後の解と係数の関係の部分ですが，２次方程式や３次方程式の解と係数の関係の導出方法をしっかりと理解していれば，４次方程式の解と係数の関係も導出できるはずです。

ちなみに，$16x^4-20x^2+5=0$ を満たす x は，$x^2=\dfrac{10\pm2\sqrt{5}}{16}$ を満たしており，大きいほうから

$$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},\ \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},\ \frac{-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},\ \frac{-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

であるため，

$$\cos\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\ ,\ \cos\frac{3\pi}{10}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\cos\frac{7}{10}\pi=\frac{-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\ ,\ \cos\frac{9}{10}\pi=\frac{-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

となります。

このオチにもっていく問題も一応載せておきます。

x の整式 $f_n(x)$ $(n=0,1,2,\cdots)$ を

$$\begin{cases} f_0(x)=1\ ,\ f_1(x)=x \\ f_{n+1}(x)=2xf_n(x)-f_{n-1}(x) \quad (n=1,2,\cdots) \end{cases}$$

で定める。

(1)　方程式 $f_5(x)=0$ を解け。

(2)　$f_n(\cos\theta)=\cos n\theta$ $(n=2,3,4,5)$ を示せ。

(3)　$\cos\dfrac{\pi}{10}$，$\cos\dfrac{3\pi}{10}$，$\cos\dfrac{7\pi}{10}$，$\cos\dfrac{9\pi}{10}$ の値を求めよ。

＜ '12 東京海洋大 ＞