実数 x_i，y_i（$i=1, 2, \cdots, n$）に対して次の不等式を証明せよ。
ただし，n は自然数である。

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2}$$

＜ '11 大分大 ＞

【戦略】

具体的に書き下すと

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \leqq \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2}\ \sqrt{{y_1}^2 + {y_2}^2 + \cdots + {y_n}^2}$$

で，コーシー・シュワルツの不等式と呼ばれます。

右辺は常に正の数となることから，左辺が 0 以下のときの成立は明らかです。

したがって，左辺が正のときを示せば十分です。

一般に $A \geqq 0$，$B \geqq 0$ であるとき

$$A \leqq B \iff A^2 \leqq B^2$$

であることを考えると

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2\right)$$

を証明すればよいことになります。

この証明については経験がモノをいう部分も大きいですが，

示すべき不等式が

$$\bigcirc^2 - \triangle\square \leqq 0$$

という形をしていることから何かインスピレーションできるものはありませんか？

解答

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2} \quad \cdots (*)$$ を証明する。

まず，$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ のとき，$(*)$ の左辺，右辺ともに 0 ということになり，$(*)$ は成立する。

$y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 0$ のときも同様に $(*)$ は成立する。

よって，以下では，

$x_i \fallingdotseq 0$，$y_j \fallingdotseq 0$ となる i，j（$=1, 2, \cdots, n$）が存在する …(☆)

ときを考える。

このとき，$(*)$ の右辺は正の実数をとる。

$(*)$ の左辺が 0 以下のときは $(*)$ の成立は明らかであるため，$(*)$ の左辺が正であるときを考えれば十分である。

このとき

$$(*) \iff \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2\right) \quad \cdots (**)$$

であることから，$(**)$ を証明する。

ここで，t についての 2 次方程式

$$\left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2\right) t^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) t + \left(\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2\right) = 0 \quad \cdots ①$$

について考える。（(☆) より，最高次の係数は正である）

① は

$$({x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2) t^2 - (2 x_1 y_1 + 2 x_2 y_2 + \cdots + 2 x_n y_n) t + ({y_1}^2 + {y_2}^2 + \cdots + {y_n}^2) = 0$$

となり，これを整理すると

$$(x_1 t - y_1)^2 + (x_2 t - y_2)^2 + \cdots + (x_n t - y_n)^2 = 0$$

と変形できる。

これを満たす実数 t は高々 1 個である。

これより，① の判別式を D とすると，$\dfrac{D}{4} \leqq 0$ である。

$\dfrac{D}{4} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2\right)$ であるので

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2\right) \leqq 0$$

が成り立つ。

よって，$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2\right)$ が成り立ち，$(**)$ が示された。

以上から，題意の不等式が成立することが示された。

【総括】

コーシー・シュワルツの不等式の証明で，多くの参考書は唐突に

$$\left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2\right)t^2-2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)t+\left(\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2\right)=0$$

という２次方程式を持ち出して証明しています。

言われればそうだけどという天下り感を強く感じることと思います。

戦略でも書きましたが，示すべき不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2\right)$$

の形が，$○^2-△□\leqq 0$ という形であることから判別式をインスピレーションできれば，自力での証明も可能だと思います。

ちなみに３次元までであれば，高校数学の範囲でも

$\vec{p}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，$\vec{q}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ として，$\vec{p}$，$\vec{q}$ のなす角を θ とすると

$$(\vec{p}\cdot\vec{q})^2=|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2\cos^2\theta \leqq |\vec{p}|^2|\vec{q}|^2$$

であることは利用しても意味が通じるでしょうから，ただちに

$$(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2\leqq({x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2)({y_1}^2+{y_2}^2+{y_3}^2)$$

が得られます。

ちなみにコーシーシュワルツの不等式には積分 Ver もあり

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2\leqq\int_a^b (f(x))^2\,dx \int_a^b (g(x))^2\,dx \quad \cdots(***)$$

という形をしています。

証明については，本問と同様のシナリオで証明できます。

任意の実数 t に対して $\int_a^b \{tf(x)-g(x)\}^2\,dx\geqq 0$ が成立する。

これより，$\left(\int_a^b f(x)^2\,dx\right)t^2-2\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)t+\left(\int_a^b g(x)^2\,dx\right)\geqq 0$ が任意の実数 t で成立する。

$\int_a^b f(x)^2\,dx=0$ とすると，$f(x)^2$ が恒等的に 0 ということになり，$(***)$ の成立は明らかであるから，$\int_a^b f(x)^2\,dx\fallingdotseq 0$ のときを考えればよく，このとき，$\int_a^b f(x)^2\,dx>0$ が成立する。

ゆえに $\left(\int_a^b f(x)^2\,dx\right)t^2-2\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)t+\left(\int_a^b g(x)^2\,dx\right)=0$ の判別式を D として $\dfrac{D}{4}\leqq 0$ が成立する。

このことから，$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2-\left(\int_a^b f(x)^2\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)^2\,dx\right)\leqq 0$

すなわち

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2\leqq\int_a^b (f(x))^2\,dx \int_a^b (g(x))^2\,dx$$

が成立する。