実数の間の等式

$$\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2 \cdots\cdots (*)$$

を以下の手順に従って示せ。

(1) 係数が整数である x の 3 次方程式で $x=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ が解になるものを 1 つ求めよ。

(2) (1) で求めた 3 次方程式を解くことにより，等式 $(*)$ を証明せよ。

＜ '09 東北大 ＞

【戦略】

丁寧な誘導がついているので，オチまでの道筋はおおよそたつと思われます。

(1) は３乗根を外すために３乗計算をしますが，数字が汚いので，全集中で処理しましょう。

その際の工夫の１つですが

汚いものは文字で置く

という工夫をしましょう。

汚いものに直接触れるのは衛生上よろしくありません。

ここでは $u=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}$, $v=\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ **と置くことにします。**

$x=u-v$ **を解にもつ３次方程式を作りたいわけなので，**

$$\begin{aligned}x^3&=(u-v)^3\\&=u^3-3u^2v+3uv^2-v^3\\&=(u^3-v^3)-3uv(u-v)\\&=(u^3-v^3)-3uv\,x\end{aligned}$$

と進めていきますが，必要なものは u^3-v^3, uv **ですので，それを計算すればおしまいです。**

(2) は (1) で得た３次方程式を解くと， $x=2,\ -1\pm\sqrt{6}i$ **という解を得ます。**

$x=u-v$ **は汚いとはいえ実数解なので，** $u-v=2$ **を得て** $(*)$ **が示されます。**

解答

(1) $u=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}$, $v=\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ とおく。

このとき，$\begin{cases}u^3=5\sqrt{2}+7\\v^3=5\sqrt{2}-7\\uv=\sqrt[3]{(5\sqrt{2}+7)(5\sqrt{2}-7)}=\sqrt[3]{1}=1\end{cases}$ $\cdots$ ①

$x=u-v$ であるとき，

$$\begin{aligned}x^3&=(u-v)^3\\&=u^3-3u^2v+3uv^2-v^3\\&=(u^3-v^3)-3uv(u-v)\\&=(u^3-v^3)-3uv\,x\\&=\{(5\sqrt{2}+7)-(5\sqrt{2}-7)\}-3x\ (\because ①)\\&=14-3x\end{aligned}$$

よって，$x\,(=u-v)$ は $x^3+3x-14=0$ という関係式を満たす。

ゆえに，$x=u-v$ を解にもつ整数係数 3 次方程式の 1 つは

$$x^3+3x-14=0 \cdots 答$$

(2) $x^3+3x-14=0$ は $(x-2)(x^2+2x+7)=0$ と変形できる。

よって，(1) の 3 次方程式の解は i を虚数単位として

$$x=2,\ -1\pm\sqrt{6}i$$

$x=u-v$ は (1) の 3 次方程式の実数解であるため

$u-v=2$，すなわち $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2$ が成立する。

ゆえに，等式 $(*)$ が示された。

【総括】

3 次方程式の解の公式（カルダノの公式）が背景にある問題です。

一般の３次方程式の解の公式について見てみます。

まず，最高次の係数が１の $x^3+ax^2+bx+c=0$ について考えれば十分です。

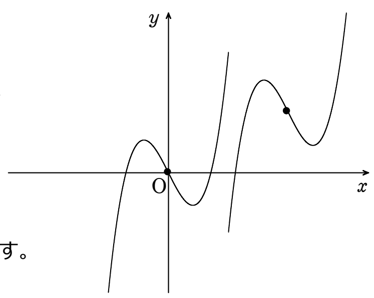
このとき，$x=X-\frac{a}{3}$ とおきます。

すると，$\left(X-\frac{a}{3}\right)^3+a\left(X-\frac{a}{3}\right)^2+b\left(X-\frac{a}{3}\right)+c=0$ で，これを整理すると，X^2 の係数が消えて，

$$X^3+pX+q=0\ \cdots(☆)$$

という形に帰着します。

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$



に対して，$f''(x)=0$ を解くと

$x=-\frac{a}{3}$ ですから

$\left(-\frac{a}{3},\ f\left(-\frac{a}{3}\right)\right)$ が変曲点です。

３次関数は変曲点について点対称です。

その変曲点を原点に重ねるように平行移動すると，

$$y-f\left(-\frac{a}{3}\right)=f\left(x+\frac{a}{3}\right)$$

となり，$g\,(X)=f\left(x+\frac{a}{3}\right)+f\left(-\frac{a}{3}\right)$ とおくと，$y=G(X)$ は奇関数となります。

つまり，

$$\begin{aligned}f\left(x+\frac{a}{3}\right)&=g\,(X)-f\left(-\frac{a}{3}\right)\\&=X^3+pX+q\end{aligned}$$

ということになり，$f\,(x)$ において，$X=x+\frac{a}{3}$ とおくことで

$f(X)=X^3+pX+q$ という形となります。

どんな３次方程式も (☆) の形に帰着できるので，(☆) を一般的に解くことにします。

さて，(☆) の解を $X=u+v$ と表します。

このとき，$X=u+v$ は (☆) を満たすので

$(u+v)^3+p\,(u+v)+q=0$ であり，これを整理すると

$$u^3+v^3+3uv\,(u+v)+p\,(u+v)+q=0\ \cdots(★)$$

となります。

ここで，$\begin{cases}u^3+v^3=-q\\ uv=-\frac{p}{3}\end{cases}$，すなわち $\begin{cases}u^3+v^3=-q\\ u^3v^3=-\frac{p^3}{27}\end{cases}$ を満たす u，v は

(★) を満たしていますから，この u，v に対して，$X=u+v$ が (☆) の解ということになります。

$\begin{cases}u^3+v^3=-q\\ u^3v^3=-\frac{p^3}{27}\end{cases}$ を満たす u^3，v^3 に対して，$u^3=U$，$v^3=V$ とおくと

ω を $\omega^3=1$ を満たす虚数解の１つとすると

$$u=\sqrt[3]{U}\,,\ \sqrt[3]{U}\,\omega,\ \sqrt[3]{U}\,\omega^2$$
$$v=\sqrt[3]{V}\,,\ \sqrt[3]{V}\,\omega,\ \sqrt[3]{V}\,\omega^2$$

となりますから，$X=\sqrt[3]{U}+\sqrt[3]{V}$，$\sqrt[3]{U}\,\omega+\sqrt[3]{V}\,\omega$，$\sqrt[3]{U}\,\omega^2+\sqrt[3]{V}\,\omega^2$

と，これが (☆) の解ということになります。

今回の $x^3+3x-14=0$ をカルダノの公式を用いて解いてみます。

まずは $x=u+v$ とおき，$\begin{cases}u^3+v^3=14\\ u^3v^3=-1\end{cases}$ を満たす u^3，v^3 を求めます。

この u^3，v^3 は 解と係数の関係から $t^2-14t-1=0$ の解ですので

$$u^3=5\sqrt{2}+7,\ v^3=-(5\sqrt{2}-7)$$

となり，$u=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}$，$v=-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ を得ます。

ゆえに，$x=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ が $x^3+3x-14=0$ の解の１つであることになるわけです。

カルダノの公式では

$$X=\sqrt[3]{U}+\sqrt[3]{V},\ \sqrt[3]{U}\,\omega+\sqrt[3]{V}\,\omega,\ \sqrt[3]{U}\,\omega^2+\sqrt[3]{V}\,\omega^2$$

という形で表されるため，例え実数解を３つもつような３次方程式でも虚数を用いて表されることになり，かつて多くの数学者を混乱させました。

本問は $x=2$ という単純な解が，解の公式経由で求めると，すごく複雑な形をしているということの一端を体験させてくれる問題であったと言えましょう。

【復習用問題】

$\alpha=\sqrt[3]{\sqrt{\dfrac{28}{27}}+1}-\sqrt[3]{\sqrt{\dfrac{28}{27}}-1}$ とする。

(1) 整数を係数とする 3 次方程式で，α を解にもつものがあることを示せ。

(2) α は整数であることを示せ。また，その整数を答えよ。

＜ '02 大阪教育大 ＞

解答

(1) $u=\sqrt[3]{\sqrt{\dfrac{28}{27}}+1}$，$v=\sqrt[3]{\sqrt{\dfrac{28}{27}}-1}$ とおく。

$u^3=\sqrt{\dfrac{28}{27}}+1$，$v^3=\sqrt{\dfrac{28}{27}}-1$

$$\begin{cases} u^3=\sqrt{\dfrac{28}{27}}+1 \\ v^3=\sqrt{\dfrac{28}{27}}-1 \\ uv=\sqrt[3]{\left(\sqrt{\dfrac{28}{27}}+1\right)\left(\sqrt{\dfrac{28}{27}}-1\right)}=\sqrt[3]{\dfrac{1}{27}}=\dfrac{1}{3} \end{cases} \quad \cdots ①$$

$\alpha=u-v$ であり，

$$\begin{aligned} \alpha^3&=(u-v)^3 \\ &=u^3-3u^2v+3uv^2-v^3 \\ &=(u^3-v^3)-3uv\,(u-v) \\ &=(u^3-v^3)-3uv\,\alpha \\ &=\left\{\left(\sqrt{\dfrac{28}{27}}+1\right)-\left(\sqrt{\dfrac{28}{27}}-1\right)\right\}-\alpha \quad (\because ①) \\ &=2-\alpha \end{aligned}$$

ゆえに，$\alpha^3+\alpha-2=0$ を満たしており，α を解にもつ整数係数の 3 次方程式として

$$x^3+x-2=0$$

が存在する。

よって，題意は示された。

(2) $x^3+x-2=0$ は $(x-1)(x^2+x+2)=0$ と変形できる。

よって $x^3+x-2=0$ の解は i を虚数単位として

$$x=1,\ \frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$$

$x=\alpha$ は $x^3+x-2=0$ の実数解であるため，$\alpha=1$ を得る。

ゆえに α は整数で，その整数は 1 …答

カルダノの公式の途中経過を彷彿とさせる誘導のつけ方の問題も載せておきます。

【復習用問題２】

(1) 次の関係式を満たす実数の組 $(\alpha,\ \beta)$ をすべて求めよ。

$$\begin{cases} \alpha\beta=12 \\ \alpha^3+\beta^3=91 \end{cases}$$

(2) 次の方程式の解をすべて求めよ。

$$x^3-36x+91=0$$

＜ '02 お茶の水女子大 改 ＞

【復習用問題２　戦略】

(1) は解と係数の関係から求めればよいでしょう。

ただ，少し数が大きいので，$91=3^3+4^3$，$12^3=3^3\cdot4^3$ と見る工夫はしたいところです。

(2) ですが，(1) をヒントと捉えると

$x^3-36x+91=x^3-3\alpha\beta x+\alpha^3+\beta^3$ **と見ることができます。**

そして，

$$\alpha^3+\beta^3+x^3-3\alpha\beta x=(\alpha+\beta+x)(\alpha^2+\beta^2+x^2-\alpha\beta-\beta x-x\alpha)$$

と因数分解できます。

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

は実践レベルでよく登場する準公式のようなものなので，必要に応じて使いこなせるようにインストールしておきましょう。

【復習用問題２】解答

(1) $\begin{cases} \alpha^3+\beta^3=91\ (=3^3+4^3) \\ \alpha^3\beta^3=12^3\ (=3^3\cdot4^3) \end{cases}$ より，解と係数の関係から

α^3，β^3 は t についての 2 次方程式

$$t^2-(3^3+4^3)\,t+(3^3\cdot4^3)=0,\ \text{すなわち}\ (t-3^3)(t-4^3)=0$$

の解である。

ゆえに，$(\alpha^3,\ \beta^3)=(3^3,\ 4^3),\ (4^3,\ 3^3)$

α，β は実数であるという条件から $(\alpha,\ \beta)=(3,\ 4),\ (4,\ 3)$ …答

(2)
$$\begin{aligned} x^3-36x+91&=x^3-3\alpha\beta x+\alpha^3+\beta^3 \\ &=\alpha^3+\beta^3+x^3-3\alpha\beta x \\ &=(\alpha+\beta+x)(\alpha^2+\beta^2+x^2-\alpha\beta-\beta x-x\alpha) \\ &=(7+x)\{(3^2+4^2)+x^2-3\cdot4-(3+4)x\} \\ &=(x+7)(x^2-7x+13) \end{aligned}$$

対称性から
$(\alpha,\ \beta)=(3,\ 4)(4,\ 3)$
どちらの場合も同じ

よって，与えられた方程式は

$(x+7)(x^2-7x+13)=0$ と変形でき，

求める解は $x=-7,\ \dfrac{7\pm\sqrt{3}i}{2}$ …答