正の実数からなる数列 $\{a_n\}$ があって，次を満たしているとする。

$a_1=2$，$a_{n+1}{}^2-a_na_{n+1}-a_n{}^2=(-1)^n$（$n=1，2，3，\cdots\cdots$）

(1)　a_2，a_3 を求めよ。

(2)　$a_n \leqq a_{n+1}$（$n=1，2，3，\cdots\cdots$）を示せ。

(3)　a_n は自然数であることを示せ。

＜ '12 兵庫県立大 ＞

【戦略】

(1)　**実験的な設問です。**

与えられた漸化式を使ってみて，次の項を出す要領を掴みます。

(2)　**数列 $\{a_n\}$ が単調増加数列であることを証明することになります。**

「差」である $a_{n+1}-a_n$ を意識し，

番号を上げて辺々操作

という作戦をとります。

その結果，この数列 $\{a_n\}$ がフィボナッチ数列（厳密には初項が違うのでフィボナッチ数列とは呼びませんが）の構造である

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$$

を得ることになります。

これは (3) も同時に片付いたも同然です。

解答

(1)　与えられた漸化式に $n=1$ を代入すると

$a_2{}^2-a_1a_2-a_1{}^2=(-1)^1$ で，$a_1=2$ より

$a_2{}^2-2a_2-3=0$，すなわち $(a_2-3)(a_2+1)=0$

条件から $a_2>0$ であるため，$a_2=3$ …答

また，与えられた漸化式に $n=2$ を代入すると

$a_3{}^2-a_2a_3-a_2{}^2=(-1)^2$ で，$a_2=3$ より

$a_3{}^2-3a_3-10=0$，すなわち $(a_3-5)(a_3+2)=0$

条件から $a_3>0$ であるため，$a_3=5$ …答

(2)　与えられた漸化式

$$a_{n+1}{}^2-a_n a_{n+1}-a_n{}^2=(-1)^n \quad \cdots ①$$

において，n に $n+1$ を代入すると

$$a_{n+2}{}^2-a_{n+1}a_{n+2}-a_{n+1}{}^2=(-1)^{n+1} \quad \cdots ②$$

①＋② より，$a_{n+2}{}^2-a_n{}^2-(a_{n+2}+a_n)a_{n+1}=0$

$(a_{n+2}+a_n)(a_{n+2}-a_n)-(a_{n+2}+a_n)a_{n+1}=0$

$(a_{n+2}+a_n)\{(a_{n+2}-a_n)-a_{n+1}\}=0$

数列 $\{a_n\}$ は正の項からなるという条件から，$a_{n+2}+a_n>0$

ゆえに，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ …$(*)$ を得る。

今，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$
$\quad >a_{n+1}$（$\because$ $a_n>0$ という条件）

つまり，$n=1，2，\cdots$ に対して，$a_{n+2}>a_{n+1}$ が成立する。

これは，$n=2，3，\cdots$ に対して，$a_{n+1}>a_n$ が成立することを意味する。

一方，$a_2>a_1$ は成立するので，$n=1，2，\cdots$ に対して $a_{n+1}>a_n$ が成立することになり，題意は示された。

(3)　a_n が自然数であること …$(**)$ を数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1，2$ のとき

条件より a_1（$=2$），a_2（$=3$）は自然数であり，$(**)$ は正しい。

(ii)　$n=k，k+1$ のとき

a_k，a_{k+1} が自然数だと仮定する。

$a_{n+1}{}^2-a_na_{n+1}-a_n{}^2=(-1)^n$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ は $(*)$ の関係を満たしていることから，

$$a_{k+2}=a_{k+1}+a_k$$

が成立する。

仮定より，a_k，a_{k+1} は自然数であるので，その和である a_{k+2} も自然数となる。

これより，$n=k+2$ のときも $(**)$ は正しい。

(i)，(ii) より $n=1，2，3，\cdots$ に対して，a_n は自然数であることが示された。

【総括】

(2) が中々の曲者です。

単調増加数列であることを示すというところから，「階差」を意識することで，番号をずらしてからの辺々操作という発想に至ることになると思います。

さて，ここである定理をご紹介します。

カッシーニ・シムソンの定理と呼ばれるものです。

カッシーニ・シムソンの定理

$f_1=f_2=1$ であるという条件の下で

$$f_{n+2}=f_{n+1}+f_n \iff f_{n+2}f_n-f_{n+1}{}^2=(-1)^{n-1}$$

である

（ $\Rightarrow$ の証明）

$$f_{n+2}=f_{n+1}+f_n \implies f_{n+2}f_n-f_{n+1}{}^2=(-1)^{n-1} \quad \cdots (*)$$

であることを数学的帰納法で示す。

(i)　$n=1$ のとき　　$f_1=f_2=1$ であるから，$f_3=2$

$f_3f_1-f_2{}^2=2\cdot 1-1^2=(-1)^0$ であり，$(*)$ は成立する。

(ii)　$n=k$ $(k=1,2,\cdots)$ のとき

$f_{k+2}f_k-f_{k+1}{}^2=(-1)^{k-1}$ が成立すると仮定する。

$$\begin{aligned}
f_{k+3}f_{k+1}-f_{k+2}{}^2 &= (f_{k+2}+f_{k+1})f_{k+1}-f_{k+2}{}^2\\
&=f_{k+2}f_{k+1}+f_{k+1}{}^2-f_{k+2}{}^2\\
&=f_{k+2}(f_{k+2}-f_k)+f_{k+1}{}^2-f_{k+2}{}^2\\
&=-f_{k+2}f_k+f_{k+1}{}^2\\
&=-(f_{k+2}f_k-f_{k+1}{}^2)\\
&=-(-1)^{k-1} \quad (\because \text{帰納法の仮定})\\
&=(-1)^k
\end{aligned}$$

ゆえに，$n=k+1$ のときも $(*)$ は成立する。

(i)，(ii) より，$(*)$ が示された。

（ $\Leftarrow$ の証明）

$$f_{n+2}f_n-f_{n+1}{}^2=(-1)^{n-1} \implies f_{n+2}=f_{n+1}+f_n \text{ かつ } f_n,\ f_{n+1}>0 \quad \cdots (**)$$

であることを数学的帰納法で証明する。

（Ⅰ）　$n=1$ のとき

$f_3f_1-f_2{}^2=1$ であるので，$f_3-1=1$，すなわち $f_3=2$

したがって，$f_3=f_2+f_1$ かつ $f_1,\ f_2>0$ であり，$(**)$ は正しい。

（Ⅱ）　$n=k$ $(k=1,2,\cdots)$ のとき

$f_{k+2}=f_{k+1}+f_k$ かつ $f_k,\ f_{k+1}>0$ であると仮定する。

さて，$\begin{cases} f_{k+3}f_{k+1}-f_{k+2}{}^2=(-1)^k \\ f_{k+2}f_k-f_{k+1}{}^2=(-1)^{k-1}\end{cases}$ が成り立っているので，辺々加えると

$$f_{k+3}f_{k+1}-f_{k+2}{}^2+f_{k+2}f_k-f_{k+1}{}^2=0$$

$$f_{k+3}f_{k+1}-f_{k+2}{}^2+f_{k+2}(f_{k+2}-f_{k+1})-f_{k+1}{}^2=0$$

$$f_{k+1}{}^2+f_{k+2}f_{k+1}-f_{k+3}f_{k+1}=0$$

$$f_{k+1}(f_{k+2}+f_{k+1}-f_{k+3})=0$$

帰納法の仮定から，$f_{k+1}>0$ であるので，$f_{k+2}+f_{k+1}-f_{k+3}=0$

すなわち，$f_{k+3}=f_{k+2}+f_{k+1}$ が成立する。

帰納法の仮定から，$f_k,\ f_{k+1}>0$ であるため，$f_{k+1},\ f_{k+2}(=f_k+f_{k+1})$ もともに正の値となる。

よって，$n=k+1$ のときも $(**)$ は正しい。

以上（Ⅰ），（Ⅱ）から $(**)$ が示された。

以下，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ という漸化式で定まる数列 $\{a_n\}$ について初期条件がずれているだけで，項の現れ方自体がフィボナッチ数列と同様のとき「フィボナッチ構造」と呼ぶことにします。

※$f_1=1,\ f_2=1,\ f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$ と，初期条件が特別なときにフィボナッチ数列と呼ぶので，これと区別したいためです。

$m=1,2,\cdots$ に対してフィボナッチ構造の数列 $\{a_n\}$ の初期条件 $a_1,\ a_2$ が

$a_1=f_{2m},\ a_2=f_{2m+1}$ のとき「o−フィボナッチ構造」

　※ odd ：奇数　　初項が奇数個ずれている

$a_1=f_{2m+1},\ a_2=f_{2m+2}$ のとき「e−フィボナッチ構造」

　※ even：偶数　　初項が偶数個ずれている

と呼ぶことにします。

ex

$\{f_n\}$：1，1，2，$\boxed{3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \cdots\cdots}$

$\{a_n\}$：3，5，8，13，21，……

（これは o−フィボナッチ構造の数列）

$\{f_n\}$：1，1，2，3，$\boxed{5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \cdots\cdots}$

$\{a_n\}$：5，8，13，21，……

（これは e−フィボナッチ構造の数列）

フィボナッチ構造の数列 $\{a_n\}$ は，フィボナッチ数列 $\{f_n\}$ の部分列であると言えます。

カッシーニ・シムソンの定理は次のように言い直すこともできます。

$a_1=f_{2m+1}$，$a_2=f_{2m+2}$ という条件の下で

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \iff a_{n+2}a_n-a_{n+1}{}^2=(-1)^{n-1} \cdots (☆)$$

$a_1=f_{2m}$，$a_2=f_{2m+1}$ という条件の下で

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \iff a_{n+2}a_n-a_{n+1}{}^2=(-1)^n$$

要するに，

偶数個ズレるか，奇数個ズレるかによって，数列 $\{a_{n+2}a_n-a_{n+1}{}^2\}$ が

$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \cdots$ なのか，$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots$ なのかが違うだけ

ということです。

以下，本問の総括に戻ります。

今回の初期条件 $a_1=2$，$a_2=3$ というのは，$a_1=f_3$，$a_2=f_4$ です。

仮に出題者が，フィボナッチ構造であるような数列 $\{a_n\}$ が答えになるように仕組むとしたら，この数列 $\{a_n\}$ は e−フィボナッチ構造ですから

(☆) から

$$a_{n+2}a_n-a_{n+1}{}^2=(-1)^{n-1}$$

が成り立ちます。

この式に，$a_{n+2}=\boxed{a_{n+1}+a_n}$ を代入すると

$(a_{n+1}+a_n)a_n-a_{n+1}{}^2=(-1)^{n-1}$ を得て，両辺に -1 をかけると

$a_{n+1}{}^2-a_na_{n+1}-a_n{}^2=(-1)^n$ という本問で与えられた漸化式となりました。

つまり

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \implies a_{n+1}{}^2-a_na_{n+1}-a_n{}^2=(-1)^n$$

ということです。

問題はこの命題の逆が成り立つかどうかですが，解答 を見ればわかる通り

$$a_{n+1}{}^2-a_na_{n+1}-a_n{}^2=(-1)^n \text{ かつ } a_n>0 \implies a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$$

と，各項が正であるという条件付きならば，フィボナッチ構造であるということが言えます。