次の問いに答えよ。

(1) $a_0<b_0$, $a_1<b_1$ を満たす正の実数 a_0, b_0, a_1, b_1 について，

$$\frac{b_1{}^2}{a_0{}^2+1}+\frac{a_1{}^2}{b_0{}^2+1}>\frac{a_1{}^2}{a_0{}^2+1}+\frac{b_1{}^2}{b_0{}^2+1}$$

が成り立つことを示せ。

(2) n 個の自然数 x_1, x_2, $\cdots$, x_n は互いに相異なり，$1\leqq x_k\leqq n$ $(1\leqq k\leqq n)$ を満たしているとする。このとき，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k{}^2}{k^2+1}>n-\frac{8}{5}$$

が成り立つことを示せ。

＜ '99 京都大 ＞

【戦略】

(1) の不等式証明については手なりに差をとって計算していけば躓くことなく示せると思います。

(2) については $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k{}^2}{k^2+1}$ は直接計算不可能ですから，等号をつないでいくことは諦め，不等式をつないでいく，すなわち評価する方向にいくことになります。

そこで (1) の不等式をどう利用するか，(1) の結果が何を意味しているのかということを汲み取ることにしましょう。

(1) は要するに

$$\frac{\text{大}}{a_0{}^2+1}+\frac{\text{小}}{b_0{}^2+1}>\frac{\text{小}}{a_0{}^2+1}+\frac{\text{大}}{b_0{}^2+1}$$

ということを意味しています。

もっと言えば

分子には
左から小さい数を置い
ていくと小さくなる

$$\frac{\quad}{a_0{}^2+1}+\frac{\quad}{b_0{}^2+1}$$

ということを意味しています。

つまり $\dfrac{x_1{}^2}{1^2+1}+\dfrac{x_2{}^2}{2^2+1}+\cdots+\dfrac{x_n{}^2}{n^2+1}$ を小さくしようと思ったら，

分母を左から 1, 2, $\cdots$, n としていくのが最善である

ということになります。

よって，$\dfrac{1^2}{1^2+1}+\dfrac{2^2}{2^2+1}+\cdots+\dfrac{n^2}{n^2+1}>n-\dfrac{8}{5}$ を示すことになります。

これを帯分数に直して整理すると，示すべき不等式は $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+1}<\frac{8}{5}$ となります。

この後は「計算できない$\sum$は面積評価」という定番の手法で倒せば OK です。

解答

(1)

$$\frac{b_1{}^2}{a_0{}^2+1}+\frac{a_1{}^2}{b_0{}^2+1}-\left(\frac{a_1{}^2}{a_0{}^2+1}+\frac{b_1{}^2}{b_0{}^2+1}\right)$$
$$=\frac{b_1{}^2-a_1{}^2}{a_0{}^2+1}+\frac{a_1{}^2-b_1{}^2}{b_0{}^2+1}$$
$$=(b_1+a_1)(b_1-a_1)\left(\frac{1}{a_0{}^2+1}-\frac{1}{b_0{}^2+1}\right)$$
$$=(b_1+a_1)(b_1-a_1)\frac{(b_0+a_0)(b_0-a_0)}{(a_0{}^2+1)(b_0{}^2+1)}\ \cdots①$$

条件より，a_0, b_0, a_1, b_1 は正の実数で，$b_0>a_0$, $b_1>a_1$ であるから，① の値は正となる。

よって，題意は示された。

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k{}^2}{k^2+1}=\frac{x_1{}^2}{1^2+1}+\frac{x_2{}^2}{2^2+1}+\cdots+\frac{x_n{}^2}{n^2+1}$

$x_1\sim x_n$ は 1 から n のどれかに 1 対 1 対応しており，(1) より

$$\begin{aligned}\frac{x_1{}^2}{1^2+1}+\frac{x_2{}^2}{2^2+1}+\cdots+\frac{x_n{}^2}{n^2+1}&\geqq\frac{1^2}{1^2+1}+\frac{2^2}{2^2+1}+\cdots+\frac{n^2}{n^2+1}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{k^2+1}\\&=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2+1}\right)\\&=n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+1}\end{aligned}$$

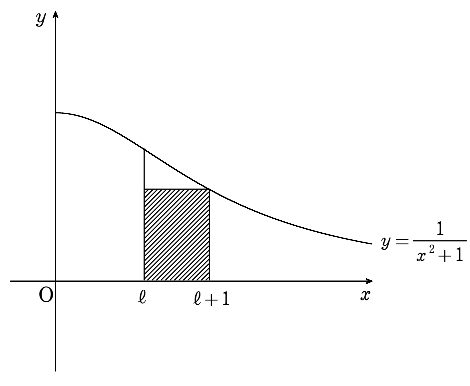
ゆえに，$\displaystyle n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+1}>n-\frac{8}{5}$，すなわち

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+1}<\frac{8}{5}\ \cdots(*)$$

を示せばよい。

$f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ とすると，$x>0$ で $f(x)$ は単調減少。

さらに，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ に注意して，$y=f(x)$ のグラフの概形をかくと次のようになる。



(斜線部の面積)$\displaystyle<\int_{\ell}^{\ell+1}\frac{1}{x^2+1}\,dx$

$$\frac{1}{(\ell+1)^2+1}<\int_{\ell}^{\ell+1}\frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$\ell=0$, 1, 2, $\cdots$, $n-1$ を代入し，辺々加えると

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+1}<\int_{0}^{n}\frac{1}{x^2+1}\,dx\ \cdots②$$

$\int_0^n \frac{1}{x^2+1}dx$ について，$x=\tan\theta$ $\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$dx=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ ，

x	$0 \to n$
θ	$0 \to \alpha$

（ただし，α は $\tan\alpha=n$ ，$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ を満たす）

このとき，
$$\begin{aligned}\int_0^n \frac{1}{x^2+1}dx&=\int_0^\alpha \frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta\\&=\int_0^\alpha d\theta \quad \left(\because\ \tan^2\theta+1=\frac{1}{\cos^2\theta}\right)\\&=\Big[\theta\Big]_0^\alpha\\&=\alpha\end{aligned}$$

ここで，$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ なので，$0<\int_0^n \frac{1}{x^2+1}dx<\frac{\pi}{2}$ …③

②，③ より $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+1}<\frac{\pi}{2}$

ここで，$\frac{\pi}{2}<\frac{3.2}{2}=\frac{8}{5}$ であり，$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+1}<\frac{8}{5}$ となり，(*) が示された。

以上より題意は示された。

【(2) 戦略２ 〜 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+1}<\frac{8}{5}$ を示す部分 〜】

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+1}<$ ●と上から評価することを考える点は同じです。

解答 では面積で評価しましたが，似ている形である $\sum\frac{1}{k(k-1)}$ が部分分数分解からの「和の中抜け」で処理できることをインスピレーションする方針でやってみることにします。

(2) 部分的 別解

$k=2,3,\cdots$ について

$\frac{1}{k^2+1}\leqq\frac{1}{k^2-k}$ なので，$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2+1}\leqq\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-k}$

よって，$\frac{1}{2}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2+1}\leqq\frac{1}{2}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-k}$

すなわち，$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+1}\leqq\frac{1}{2}+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)$

$$\begin{aligned}(\text{右辺})&=\frac{1}{2}+\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}+1-\frac{1}{n}\\&=\frac{3}{2}-\frac{1}{n}\end{aligned}$$

よって，$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+1}\leqq\frac{3}{2}-\frac{1}{n}<\frac{3}{2}$

$\frac{3}{2}=1.5$，$\frac{8}{5}=1.6$ なので，$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+1}<\frac{8}{5}$

【総括】

計算できない $\sum$ については評価について問われることが多く，その代表的な評価方法として「面積評価」という手法があることは定着させておきましょう。

別解 では，面積評価よりも精度の高い評価ができました。
1.6 より小さいことを示せばよかったのですが，結果的に 1.5 より小さいことまで示すことができました。

評価（不等号を繋ぐ作業）は 「慣れや経験」に基づきながら徐々にセンスを磨いていきましょう。

今回は不等式の証明分野でしたが，この他にも
極限（はさみうち用に評価する），整数分野，数値評価
など，様々な場面で登場する概念です。

不等号を繋いでいくことが自然にできるようになると，また一歩上のステージにいけることでしょう。