関数 $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$ について次の問いに答えよ。

(1) 導関数 $f'(x)$ の最大値を求めよ。

(2) 方程式 $f(x)=x$ はただ1つの実数解をもつことを示せ。

(3) 漸化式 $a_{n+1}=f(a_n)$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ は，初項 a_1 の値によらず収束し，その極限値は (2) の方程式の解になることを示せ。

＜ '94 筑波大 ＞

【戦略】

経験がないと，最後のオチは中々難しいです。

(1)，(2) **は誘導になっていると同時に，この手の問題 であることを見抜くためのキーワードになっています。**

この (1)，(2) **については取りこぼしたくはありません。**

(1) **は微分して増減表を書くだけですし，**(2) **も** $g(x)=f(x)-x$ **などと設定し，単調性と中間値の定理を用いるというよくある問題です。**

(3) **については，**(2) **で存在が保証されている「不動点」に注目します。**

$f(\alpha)=\alpha$ **を満たす** α **の存在が保証されているので，この** α **をうまく利用して，平均値の定理で仕留めます。**

平均値の定理により，$f(a_n)-f(\alpha)=f'(c_n)(a_n-\alpha)$ **を満たす** c_n **が** α **と** a_n **の間に存在します。**
($\alpha<c_n<a_n$ **なのか** $a_n<c_n<\alpha$ **なのかが分からないので，こういう書き方にしますが，そこは今回目くじらをたてるほどの問題ではありません。**)

大切なのは，$f(a_n)-f(\alpha)=f'(c_n)(a_n-\alpha)$ **という等式が**

$a_{n+1}-\alpha=f'(c_n)(a_n-\alpha)$ **という等比数列の構造になるということです。**

ここで (1) **の出番で，**(1) **より** $f'(x)$ **の最大値は** $\dfrac{1}{4}$ **ですから**

$$|a_{n+1}-\alpha|\leqq\frac{1}{4}|a_n-\alpha|$$

という評価ができることになります。

これにより，

$$|a_n-\alpha|\leqq\frac{1}{4}|a_{n-1}-\alpha|\leqq\left(\frac{1}{4}\right)^2|a_{n-2}-\alpha|\leqq\cdots\leqq\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}|\alpha_1-\alpha|$$

と番号を下げていくことができ

$$0\leqq|a_n-\alpha|\leqq\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}|\alpha_1-\alpha|$$

から，はさみうちの原理で仕留めることになります。

解答

(1) $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ より，$f'(x)=\dfrac{e^x(e^x+1)-e^x\cdot e^x}{(e^x+1)^2}=\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$

$$f''(x)=\frac{e^x(e^x+1)^2-e^x\cdot 2e^x(e^x+1)}{(e^x+1)^4}$$

$$=\frac{e^x(e^x+1)\{(e^x+1)-2e^x\}}{(e^x+1)^4}$$

$$=\frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$$

$(e^x+1)^3>0$，$e^x>0$ より，

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f'(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$

という増減表を得る。

ゆえに $f'(x)$ は $x=0$ のとき最大値 $\dfrac{1}{4}$ をとる。 … 答

(2) $g(x)=f(x)-x$ とおく。

$g'(x)=f'(x)-1<0$ (∵ (1) より)

よって $g(x)$ は単調に減少する．… ①

一方，$g(0)=f(0)-0=\dfrac{1}{2}$，$g(1)=\dfrac{e}{1+e}-1=\dfrac{-1}{1+e}$ だから，

$$g(0)>0,\ g(1)<0$$

$g(x)$ は連続だから，中間値の定理より $g(x)=0$ は区間 $0<x<1$ に少なくとも1つの解をもつ。 … ②

①，②より 方程式 $g(x)=0$，すなわち $f(x)=x$ は $0<x<1$ にただ1つの実数解をもつ。

(3) (2) の方程式の解を α とする。このとき $f(\alpha)=\alpha$ を満たす。

平均値の定理より，$f(a_n)-f(\alpha)=f'(c_n)(a_n-\alpha)$ をみたす c_n が α と a_n の間に存在する。

(1) より，$|f'(c_n)|\,|a_n-\alpha|\leqq\dfrac{1}{4}|a_n-\alpha|$ であるから，

$$|f(a_n)-f(\alpha)|\leqq\frac{1}{4}|a_n-\alpha|$$

すなわち $|a_{n+1}-\alpha|\leqq\dfrac{1}{4}|a_n-\alpha|$ となり，

$$(0\leqq)\ |a_n-\alpha|\leqq\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}|a_1-\alpha|$$

$n\to\infty$ のとき(最右辺) $\to 0$ だから，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}|a_n-\alpha|=0$$

ゆえに $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ となり，題意は示された。

【総括】

縮小関数と呼ばれる関数による漸化式の極限で，難関大ではちょくちょく出題されています。

① f' の範囲（最大最小）

② $f(x)=x$ の唯一解（不動点）

③ $x_{n+1}=f(x_n)$ による数列 $\{x_n\}$

という３つのキーワードがこの問題を大きく特徴づけています。

不動点 α から平均値の定理を経て，

$$|f(x_n)-f(\alpha)|=|f'(c_n)||x_n-\alpha|$$

すなわち $|x_{n+1}-\alpha|=|f'(c_n)||x_n-\alpha|$ を得ることにより，① を用いて

$$|x_{n+1}-\alpha|\leqq r|x_n-\alpha| \quad (0<r<1)$$

という形の不等式にもちこみます。

そして最後は「はさみうちの原理」で仕留めるというオチです。

ちなみに，$|f(x)-f(y)|\leqq r|x-y|$ の形を満たすような定数 r が存在するとき，f はリプシッツ連続であると言い，r をリプシッツ定数と言います。

その中でも $0\leqq r<1$ を満たすようなとき，$f(x)$ を縮小関数といいます。

今回話題になっている $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$ という関数は「シグモイド関数」と呼ばれる有名なものです。（また，ロジスティクス関数と呼ばれるものの特別なものという位置づけでもあります。）

話が逸れましたので戻ります。

実際の現場では，上の３つのキーワードや、シナリオの一部が隠されていたりすることもあります。

実際以下の復習用問題では、「不動点に収束する」ということは自分で見出さなければなりません。

この類の問題は初見だと結構厳しいものがあると思います。

一連のストーリーを把握しておきましょう。

【復習用問題】

関数 $f(x)$ は区間 $0\leqq x\leqq 1$ において連続で $0\leqq f(x)\leqq 1$ を満たす。
このとき次の問いに答えよ。

(1) $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=x$ は共有点を持つことを証明せよ。

(2) $f(x)$ が微分可能で $|f'(x)|\leqq\dfrac{1}{2}$ を満たすならば

$0\leqq x_1\leqq 1$ とし，$x_{n+1}=f(x_n)$ （$n=1,2,3,\cdots\cdots$）

によって定義される数列 $\{x_n\}$ は $n\to\infty$ のとき収束することを証明せよ。

＜ '03 九州大 ＞

【復習用問題 解答】

(1) $g(x)=f(x)-x$ とおく。

$g(0)=f(0)\geqq 0$，$g(1)=f(1)-1\leqq 0$（$\because$ $0\leqq f(0)\leqq 1$，$0\leqq f(1)\leqq 1$）

関数 $g(x)$ は $0\leqq x\leqq 1$ において連続であるから，中間値の定理により，
$g(x)=0$ は区間 $0\leqq x\leqq 1$ に少なくとも 1 つの実数解をもつ。

ゆえに区間 $0\leqq x\leqq 1$ において $f(x)=x$ は少なくとも 1 つ実数解をもつので $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=x$ は共有点をもつ。

(2) $|f'(x)|\leqq\dfrac{1}{2}$ より，$-\dfrac{1}{2}\leqq f'(x)\leqq\dfrac{1}{2}$

$g'(x)=f'(x)-1<0$ であるから このとき $g(x)$ は単調減少である。

(1) より $f(x)=x$ は $0\leqq x\leqq 1$ の範囲にただ 1 つの実数解をもち，
それを α とすると

$$f(\alpha)=\alpha$$

ここで，条件から $f(x)$ は微分可能なので平均値の定理より，

$$f(x_n)-f(\alpha)=f'(c_n)(x_n-\alpha)$$

となる c_n が x_n と α の間に存在する。

条件より，$|f'(c_n)|\leqq\dfrac{1}{2}$ で $|f'(c_n)||x_n-\alpha|\leqq\dfrac{1}{2}|x_n-\alpha|$ だから，

$$|f(x_n)-f(\alpha)|\leqq\frac{1}{2}|x_n-\alpha|$$

すなわち，$|x_{n+1}-\alpha|\leqq\dfrac{1}{2}|x_n-\alpha|$ で，$(0\leqq)\ |x_n-\alpha|\leqq\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}|x_1-\alpha|$

$n\to\infty$ のとき（最右辺）$\to 0$ だから，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}|x_n-\alpha|=0$$

ゆえに $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\alpha$ となり，数列 $\{x_n\}$ は $n\to\infty$ のとき α に収束する。