赤玉，白玉，青玉が各々 a，b，c 個入った箱から 2 個の玉を同時に取り出すことを考える。ただし，a，b，c は $0<a\leqq b\leqq c$ を満たす整数である。
取り出した 2 個の玉の色が相異なる確率を $P(a,b,c)$ とする。
$a+b+c=11$ であるとき，$P(a,b,c)$ を最大にする a，b，c と，そのときの $P(a,b,c)$ の値を求めよ。

＜ '92 大阪大 改 ＞

【戦略】

$$P(a,b,c)=\frac{{}_aC_1\cdot{}_bC_1+{}_bC_1\cdot{}_cC_1+{}_cC_1\cdot{}_aC_1}{{}_{a+b+c}C_2}=\frac{ab+bc+ca}{{}_{a+b+c}C_2}$$

で，$a+b+c=11$ なので，$P(a,b,c)=\dfrac{ab+bc+ca}{{}_{11}C_2}$ と，$P(a,b,c)$ 自体はすぐに計算できるでしょう。

したがって，$ab+bc+ca$ が最大となるときを考えればよいことになります。

$a+b+c=11$ であることを活かすために

$$ab+bc+ca=\frac{1}{2}\{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\}=\frac{1}{2}\{121-(a^2+b^2+c^2)\}$$

と見ることができれば，$a^2+b^2+c^2$ が最小となるときを考えればよいことが分かります。

$0<a\leqq b\leqq c$，及び $a+b+c=11$ という条件から a はそこまで大きくないことが分かります。

例えば，$a=4$ としただけでも，$b\geqq 4$，$c\geqq 4$ ですから，$a+b+c=11$ とすることはできません。

つまり，$a=1$，2，3 と限られることになります。

もう少し式で論述すると，

$0<a\leqq b\leqq c$ より $a+a+a\leqq a+b+c$ で，$3a\leqq 11$
これを満たす自然数 a は $a=1$，2，3 に限られる

ぐらいの記述でしょうか。(整数問題でよくやる技法ですね)

いずれにせよ，$a=1$，2，3 と具体的に絞られれば，$a^2+b^2+c^2$ は b，c についての 2 変数関数で，$b+c=$(定数) という従属関係ですから，実質的には 1 変数の 2 次関数に落ち着きます。

解答

$a+b+c=11$ より，箱の中にある玉の個数は 11 個。

したがって玉の取り出し方の総数は ${}_{11}C_2=\dfrac{11\cdot 10}{2}=55$【通り】

このうち，異なる 2 色の玉を取り出す取り方は

赤玉と白玉 … ${}_aC_1\cdot{}_bC_1=ab$【通り】
白玉と青玉 … ${}_bC_1\cdot{}_cC_1=bc$【通り】
青玉と赤玉 … ${}_cC_1\cdot{}_aC_1=ca$【通り】

よって $P(a,b,c)=\dfrac{ab+bc+ca}{55}$

$$ab+bc+ca=\frac{1}{2}\{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\}=\frac{1}{2}\{121-(a^2+b^2+c^2)\}\quad(\because a+b+c=11)$$

であるから，$P(a,b,c)=\dfrac{121-(a^2+b^2+c^2)}{110}$

ゆえに，$a^2+b^2+c^2$ が最小となるときを考えれば $P(a,b,c)$ は最大となる。

ここで，$0<a\leqq b\leqq c$ より $a+a+a\leqq a+b+c$ で，$3a\leqq 11$

これを満たす自然数 a は $a=1$，2，3 に限られる。

さて，$y=a^2+b^2+c^2$ とする。

(i) $a=1$ のとき　$b+c=10$ …①

$$\begin{aligned}y&=1+b^2+c^2\\&=1+(10-c)^2+c^2\quad(\because ①)\\&=2c^2-20c+101\\&=2(c-5)^2+51\end{aligned}$$

① を考えると，$b=c=5$ のとき，y は最小となり，その最小値は 51

(ii) $a=2$ のとき　$b+c=9$ …②

$$\begin{aligned}y&=4+b^2+c^2\\&=4+(9-c)^2+c^2\quad(\because ②)\\&=2c^2-18c+85\\&=2\left(c-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{89}{2}\end{aligned}$$

b，c が $b\leqq c$ を満たす整数であることに注意すると，$b=4$，$c=5$ のときに y は最小となり，その最小値は 45

(iii) $a=3$ のとき　$b+c=8$ …③

$$\begin{aligned}y&=9+b^2+c^2\\&=9+(8-c)^2+c^2\quad(\because ③)\\&=2c^2-16c+73\\&=2(c-4)^2+41\end{aligned}$$

③ を考えると，$b=c=4$ のとき，y は最小となり，その最小値は 41

以上から，$a=3$，$b=4$，$c=4$ で，y は最小となり，その最小値は 41 となる。

このとき，$P(3,\ 4,\ 4)=\dfrac{121-41}{110}=\dfrac{8}{11}$

ゆえに，$a=3$，$b=4$，$c=4$ で $P(a,\ b,\ c)$ は最大値 $\dfrac{8}{11}$ をとる。… 答

【部分的戦略２】

$a\leqq 3$ だと絞られてから上の解答では個別に調べました。

少しテクニカルな見方ですが

$$
\begin{aligned}
a^2+b^2+c^2&=a^2+\frac{1}{2}\{(b+c)^2+(b-c)^2\}\\
&\geqq a^2+\frac{1}{2}(b+c)^2 \quad (\text{等号成立は } b=c \text{ のとき})\quad \cdots(*)\\
&=a^2+\frac{1}{2}(11-a)^2\\
&=\frac{3}{2}a^2-11a+\frac{121}{2}\\
&=\frac{3}{2}\left(a-\frac{11}{3}\right)^2+\frac{121}{3}
\end{aligned}
$$

と見ることができれば，$a\leqq\dfrac{11}{3}$ の範囲では $\dfrac{3}{2}\left(a-\dfrac{11}{3}\right)^2+\dfrac{121}{3}$ という２次関数は単調減少ですから，$a=3$ で最小値 41 となることが分かります。

このとき，$b+c=8$ ですから，$(*)$ の等号が成立するときを考えると，$b=c=4$ のときに $a^2+b^2+c^2$ が最小となることになります。

要するに $a^2+b^2+c^2\geqq a^2+\dfrac{1}{2}(b+c)^2\geqq 41$ ということです。

不等式から最大最小を論じるときは必ず等号成立について言及する必要がありますので注意しましょう。
（**例えて言えば，100 点以下だからと言って最高点が 100 とは限らない**）

部分的 別解
$a^2+b^2+c^2$ が最小となるときを考えれば $P(a,\ b,\ c)$ は最大となる　以降

$$
\begin{aligned}
a^2+b^2+c^2&=a^2+\frac{1}{2}\{(b+c)^2+(b-c)^2\}\\
&\geqq a^2+\frac{1}{2}(b+c)^2 \quad (\text{等号成立は } b=c \text{ のとき})\\
&=a^2+\frac{1}{2}(11-a)^2\\
&=\frac{3}{2}a^2-11a+\frac{121}{2}\\
&=\frac{3}{2}\left(a-\frac{11}{3}\right)^2+\frac{121}{3}
\end{aligned}
$$

今，$0<a\leqq b\leqq c$ より $a+a+a\leqq a+b+c$ で，$3a\leqq 11$ で，これを満たす自然数 a は
$a=1,\ 2,\ 3$ に限られる。

$a\leqq\dfrac{11}{3}$ の範囲では，$\dfrac{3}{2}a^2-11a+\dfrac{121}{2}$ は単調減少なので，$a=3$ で最小値 41 をとる。

これより，$a^2+b^2+c^2\geqq a^2+\dfrac{1}{2}(b+c)^2\geqq 41$

この２つの等号が同時に成り立つ条件は $\begin{cases}a=3\\ a+b+c=11\\ b=c\end{cases}$，
すなわち $a=3$，$b=4$，$c=4$

よって $a=3$，$b=4$，$c=4$ のとき $a^2+b^2+c^2$ は最小値 41 をとる。

このとき，$P(3,\ 4,\ 4)=\dfrac{121-41}{110}=\dfrac{8}{11}$

ゆえに，$a=3$，$b=4$，$c=4$ で $P(a,\ b,\ c)$ は最大値 $\dfrac{8}{11}$ をとる。… 答

【総括】

そもそもなのですが，２色が出てくる確率を高めるためには，出来る限り均等に色を用意するのですから，3 個，4 個，4 個 というように用意するのが最善であるのは直感的には当然です。

しかし，さすがにその直感を前面に押し出すような解答は許されないでしょう。

$$ab+bc+ca=\frac{1}{2}\{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\}$$

と見る部分ですが，実際の入試では実はこの部分に誘導がついていました。
（本問はその誘導をカットしました。）

$0<a\leqq b\leqq c$，$a+b+c=11$ という条件から，a はそんなに大きくないことが分かりますが，これが感覚的にパッと分かるかどうかは差がつく部分でしょう。
（整数問題の経験があるとこの見方は結構当たり前に見えてくると思いますが）

本問は確率の要素はあまりなく，$P(a,\ b,\ c)$ を立式すること自体はそんなに難しくありません。
問われているのはその後の「式の扱い」についてです。

普段の学習においては，場当たり的に式変形をするのではなく，形や目標を見定めて式を扱うことを心掛けたいものです。