直交２接線の交点の軌跡（放物線の準線）【類題】

放物線 $y=x^2$ の上の相異なる 2 点 $\mathrm{A}(a\,,\,a^2)$，$\mathrm{B}(b\,,\,b^2)$ における接線が互いに直交するとする。これらの接線の交点を C とし，2 点 A，B におけるこの放物線の法線の交点を D とする。次の問に答えよ。

(1) A と B が放物線 $y=x^2$ の上を動くとき，C の軌跡の方程式を求めよ。

(2) A と B が放物線 $y=x^2$ の上を動くとき，D の軌跡の方程式を求めよ。

＜ '03 電気通信大 ＞

【戦略 1】

(1) **$\mathrm{A}(a\,,\,a^2)$，$\mathrm{B}(b\,,\,b^2)$ における接線の式を立てて，連立して解くことで，交点 C の座標を Get できます。**

これら 2 接線の式は $\begin{cases} y=2ax-a^2 \\ y=2bx-b^2 \end{cases}$ **であるため，交点 C の座標は**

$$\left(\frac{a+b}{2}\,,\,ab\right)$$

と得られます。

これら 2 接線が直交することから $(2a)\cdot(2b)=-1$**，すなわち**

$$ab=-\frac{1}{4}$$

を得ることになり，解決です。

(2) $\begin{cases} y=-\dfrac{1}{2a}x+a^2+\dfrac{1}{2} \\ y=-\dfrac{1}{2b}x+b^2+\dfrac{1}{2} \end{cases}$ **という 2 つの法線を連立して解くことで**

交点 D は $\mathrm{D}\left(-2ab\,(a+b),\ a^2+b^2+ab+\dfrac{1}{2}\right)$ **と Get できます。**

接線が直交するという設定はまだ生きているため，$ab=-\dfrac{1}{4}$

ですから，$\mathrm{D}\left(\dfrac{a+b}{2}\,,\ a^2+b^2+\dfrac{1}{4}\right)$ **と整理できます。**

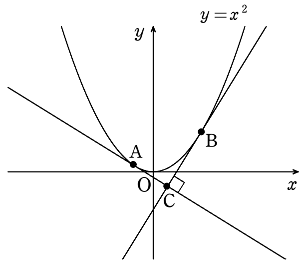
$\mathrm{D}(X\,,\,Y)$ **とすると，** $\begin{cases} X=\dfrac{a+b}{2} \\ Y=a^2+b^2+\dfrac{1}{4} \end{cases}$ **であり，X，Y の関係式を求めに行くのがスジです。**

$$\begin{aligned} Y&=(a+b)^2-2ab+\frac{1}{4} \\ &=(2X)^2-2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4} \\ &=4X^2+\frac{3}{4} \end{aligned}$$

より，解決します。

軌跡の範囲（軌跡の限界）にも気を配っておきましょう。

【解 1】



(1) $f(x)=x^2$ とおく。

$y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a\,,\,a^2)$ における接線の式は

$y=f'(t)(x-a)+a^2$

すなわち，$y=2ax-a^2$ …①

同様に $\mathrm{B}(b\,,\,b^2)$ における接線の方程式は

$$y=2bx-b^2 \ \cdots ②$$

①，② の式を連立して解くことで $x=\dfrac{a+b}{2}$，$y=ab$ を得る。

よって，$\mathrm{C}\left(\dfrac{a+b}{2}\,,\,ab\right)$

ここで，①，② は直交するため，$(2a)\cdot(2b)=-1$，すなわち

$$ab=-\frac{1}{4}$$

a，b は $ab=-\dfrac{1}{4}$ を満たすように動き，$\dfrac{a+b}{2}$ も任意の実数を動く。

したがって，C の軌跡の方程式は $y=-\dfrac{1}{4}$ …答

(2) $\mathrm{A}(a\,,\,a^2)$ における法線の方程式は

$y=-\dfrac{1}{2a}(x-a)+a^2$，すなわち $y=-\dfrac{1}{2a}x+a^2+\dfrac{1}{2}$ …③

同様に，$\mathrm{B}(b\,,\,b^2)$ における法線の方程式は

$$y=-\frac{1}{2b}x+b^2+\frac{1}{2} \ \cdots ④$$

③，④ を連立して解くと，$x=-2ab\,(a+b)$，$y=a^2+b^2+ab+\dfrac{1}{2}$

$ab=-\dfrac{1}{4}$ に注意すると，$\mathrm{D}\left(\dfrac{a+b}{2}\,,\ a^2+b^2+\dfrac{1}{4}\right)$

$D(X\,,\,Y)$ とすると，$\begin{cases} X=\dfrac{a+b}{2} \ \cdots ⑤ \\ Y=a^2+b^2+\dfrac{1}{4} \ \cdots ⑥ \end{cases}$

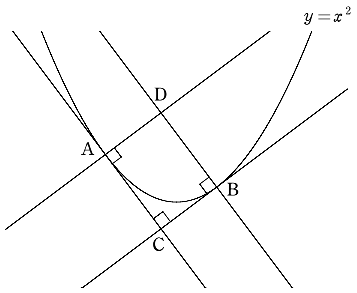
⑤ より，$a+b=2X$

⑥ より，
$$\begin{aligned} Y&=(a+b)^2-2ab+\frac{1}{4} \\ &=(2X)^2-2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4} \\ &=4X^2+\frac{3}{4} \end{aligned}$$

a，b は $ab=-\dfrac{1}{4}$ を満たすように動き，$\dfrac{a+b}{2}$ も任意の実数を動く。

よって，求める D の軌跡の方程式は，$y=4x^2+\dfrac{3}{4}$ …答

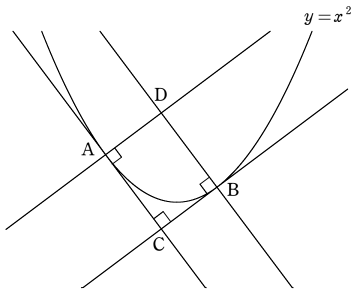
【戦略 2】



直交 2 接線と 2 法線によってできる四角形は 4 つの内角が全て $\frac{\pi}{2}$ なので長方形ということになります。

ゆえに，幾何的に線分 AB の中点と線分 CD の中点が一致することを利用して解くこともできます。

【解 2】(2) について



$\mathrm{D}(X, Y)$ とする。

法線のもつ直交性と，A，B における接線が直交するという条件から四角形 ABCD は長方形である。

ゆえに，線分 AB，CD の中点の座標は一致する。

線分 AB の中点の座標は $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a^2+b^2}{2}\right)$

線分 CD の中点の座標は $\left(\frac{\frac{a+b}{2}+X}{2}, \frac{ab+Y}{2}\right)$

したがって，$\begin{cases} \frac{X+\frac{a+b}{2}}{2}=\frac{a+b}{2} \\ \frac{Y+ab}{2}=\frac{a^2+b^2}{2} \end{cases}$

すなわち，$\begin{cases} X=\frac{a+b}{2} \\ Y=a^2+b^2-ab \end{cases}$

$ab=-\frac{1}{4}$ より，$\begin{cases} X=\frac{a+b}{2} \\ Y=a^2+b^2+\frac{1}{4} \end{cases}$

（以下【解 1】に準ずる）

【総括】

(1) の直交 2 接線の交点の軌跡に対して，

「じゃあ 2 法線の交点の軌跡は？」

というある意味自然な問いかけです。

法線自体を求めて，交点を直接的に求める【解 1】が現実的な路線でしょう。

幾何的に長方形を見出す【解 2】は見えれば気持ちよいですね。