xy 平面上の点 P (x_0, y_0) から放物線 $C: y=\dfrac{x^2}{2}$ へ２本の接線がひけるとし，接点を Q，R とする。

(1)　$\angle \mathrm{QPR}=90^\circ$ となるような点 P の軌跡を図示せよ。

(2)　$\angle \mathrm{QPR}=45^\circ$ となるような点 P の軌跡を図示せよ。

＜ ’13 山梨大 ＞

【戦略】

(1)　**まずは接点の設定からスタートです。**

記述しやすいように，$f(x)=\dfrac{x^2}{2}$ とおきます。

この放物線上の点 $(t, f(t))$ における接線の式を立て，それが $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ を通る，と翻訳すればよいでしょう。

これにより，t に関する２次方程式 $\cdots(*)$ が得られます。

その２次方程式の実数解 t_1, t_2 は，接点 Q，R の x 座標を与えます。

この２接線の傾きを m_1, m_2 とすると，$\begin{cases} m_1=f'(t_1)=t_1 \\ m_2=f'(t_2)=t_2 \end{cases}$

ですから，この２接線が直交するということは，$m_1m_2=-1$ ということが分かり，同時に $t_1t_2=-1$ ということが言えます。

もちろん，t_1t_2 は解と係数の関係から Get できますので，あとは手なりに処理するだけです。

ただし，気を付けたい点としては，軌跡の範囲であり，今回でいえば $(*)$ が相異なる２つの実数解をもつための条件を考慮しないといけません。

(2)　**90° という特殊な角度ではないため，直交条件 ($m_1m_2=-1$) のようなバシッとした翻訳はありません。**

座標における角度を扱う際の有力な方針の１つである

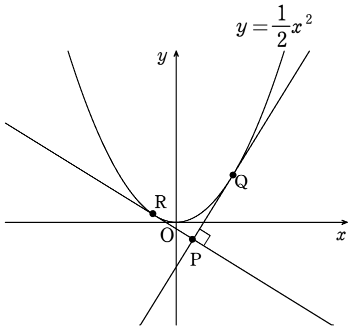
「傾きと tan の関係の利用 」

を考えます。

問題の設定から，Q，R は対等な立場ですから $t_1>t_2$ として考えても一般性を失いません。

また，(1) 同様，軌跡の範囲に注意しましょう。

解答



(1)　$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2$ とおく。

$y=f(x)$ 上の点 $\left(t, \dfrac{t^2}{2}\right)$ における接線の式は

$y=f'(t)(x-t)+\dfrac{t^2}{2}$

すなわち，$y=tx-\dfrac{t^2}{2}$

これが $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ を通るとき $y_0=tx_0-\dfrac{t^2}{2}$

これを整理すると $t^2-2x_0t+2y_0=0 \ \cdots(*)$

$\mathrm{Q}\left(t_1, \dfrac{{t_1}^2}{2}\right)$，$\mathrm{R}\left(t_2, \dfrac{{t_2}^2}{2}\right)$ とすると，t_1, t_2 は $(*)$ の異なる実数解であることから，直線 PQ，PR の傾きをそれぞれ m_1, m_2 とすると

$$\begin{cases} m_1=f'(t_1)=t_1 \\ m_2=f'(t_2)=t_2 \end{cases} \cdots ①$$

$\angle \mathrm{QPR}=90^\circ$ のとき，$m_1m_2=-1$ ，すなわち $t_1t_2=-1$ (∵ ①)

解と係数の関係より $\begin{cases} t_1+t_2=2x_0 \\ t_1t_2=2y_0 \end{cases} \cdots ②$ であることから，$2y_0=-1$

よって，$y_0=-\dfrac{1}{2}$

これより，点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ は，直線 $y=-\dfrac{1}{2}$ 上にある。

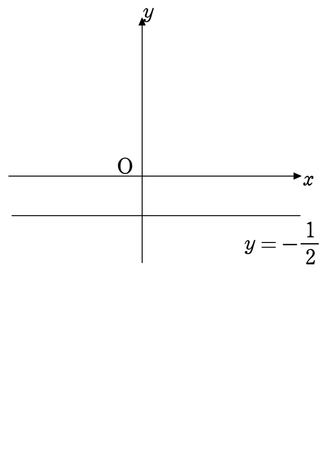
また，$(*)$ の判別式を D として，$\dfrac{D}{4}>0$ であることから

$(-x_0)^2-2y_0>0$，すなわち $y_0<\dfrac{{x_0}^2}{2} \cdots ③$

任意の x_0 に対して，直線 $y=-\dfrac{1}{2}$ 上の点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ は ③ を満たしている。

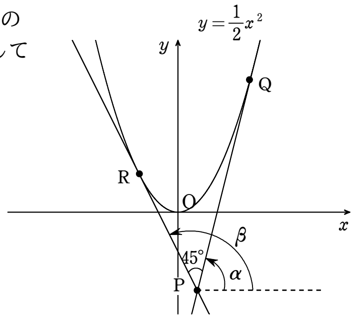
よって，求める点 P の軌跡は，直線 $y=-\dfrac{1}{2}$

これを図示すると



(2)　$t_1 > t_2$ として考えても
一般性を失わない。

直線 PQ，PR と x 軸の正の向きとのなす角を反時計回りの向きを正としてそれぞれ α，β とおく。



このとき

$\tan\alpha = ($ 直線 PQ の傾き $) = m_1$
$\tan\beta = ($ 直線 PR の傾き $) = m_2$

$$\tan(\beta-\alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha} = \frac{m_2 - m_1}{1+m_1 m_2} = \frac{t_2-t_1}{1+t_1t_2}\ (\because ①)$$

$\beta - \alpha = 45°$ より，$\dfrac{t_2-t_1}{1+t_1t_2} = \tan 45°$，すなわち $\dfrac{t_2-t_1}{1+t_1t_2} = 1$

これを整理すると，$t_2 - t_1 = 1 + t_1t_2$

$t_1 > t_2$ なので，$t_2 - t_1 < 0$ であるため，$1+t_1t_2<0$

② より，$1+2y_0<0$，すなわち $y_0 < -\dfrac{1}{2}$ …④

一方 $t_2-t_1=1+t_1t_2$ の両辺を 2 乗すると，$(t_2-t_1)^2=(1+t_1t_2)^2$

よって，$(t_1+t_2)^2-4t_1t_2=(1+t_1t_2)^2$

② より，$(2x_0)^2-8y_0=(2y_0+1)^2$

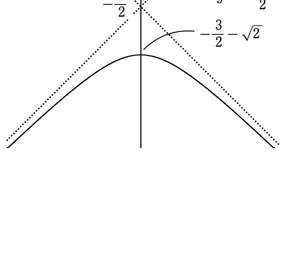
これを整理すると，$\dfrac{{x_0}^2}{2} - \dfrac{\left(y_0+\frac{3}{2}\right)^2}{2} = -1$

③，④ を同時に満たす点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ の存在領域は $y<-\dfrac{1}{2}$
$\left(\because\ y<-\dfrac{1}{2}\right.$ を満たす任意の $(x,\ y)$ は $y<\dfrac{x^2}{2}$ を満たしている。$\left.\right)$

求める点 P の軌跡は

双曲線 $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{\left(y+\frac{3}{2}\right)^2}{2} = -1$ のうち，$y<-\dfrac{1}{2}$ の部分である。

これを図示すると，以下の図の実線部である。



【総括】

まずは，軌跡を求めるためにはどうすればよいか，ということを見失ってはいけません。

ある条件を満たす点 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ の軌跡を求めるということは，

その条件によって $X,\ Y$ にどのような縛りが生じるか？

すなわち

その条件によって，$X,\ Y$ にどのような関係性が生じるか？

ということを求めにいくのが基本です。

例えば，今回の (1) では点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$（← 個人的にこの文字の置き方は気持ちが悪いのですが）を縛っている条件は

直線 PQ，PR が直交する

というものです。

式でいえば，$m_1m_2=-1$ ということですが，今欲しいものは，x_0，y_0 の間にある関係式です。

つまり

m_1，m_2 の関係式を何とかして x_0，y_0 の関係式に結び付けたい

という思考回路があってほしいと思います。

さて，今回の (1) は実は有名テーマで，しばしばネタにされます。

２次曲線の直交２接線の交点については

放物線の直交２接線の交点の軌跡 … 直線（これは準線となっています。）

楕円，双曲線の直交２接線の交点の軌跡

… 円（準線に倣って（？）準円と呼ばれます）

楕円についても一度は経験しておきたいところです。
（結構計算が重たいので，初見だと不安になりがちです。）

本問はそのような有名テーマを扱いつつ，「じゃあ 45° はどう？」といった拡張まで考えさせる問題で，個人的には教育的な問題だと感じました。