$\dfrac{10^{210}}{10^{10}+3}$ の整数部分の桁数と，1 の位の数字を求めよ。
ただし $3^{21}=10460353203$ を用いてよい。

＜ '89 東京大 ＞

【戦略】

桁数を扱う $\log_{10}$（常用対数）や，1 の位（10 で割った余り）について余りを扱う mod（合同式）といった記号が使いづらいのがツライところです。

どこから手をつけるかというところで難しく感じるでしょうが，そもそもの疑問として

①：この数字に意味はあるのか？　＋３ってなんだ？
②：$3^{21}=10460353203$ ← どこでどう使うの？　なんやねんこいつ

など、色々な疑問があります。

特に①について，「この数字だからできる」というタイプの問題であれば，この問題のもつ「特殊性」に気が付かないといけなくなります。

まずは桁数です。

$10^N \leqq \dfrac{10^{210}}{10^{10}+3} < 10^{N+1}$ **という形ではさめれば勝ちですね。**

$\dfrac{10^{210}}{10^{10}+3} < \dfrac{10^{210}}{10^{10}}\ (=10^{200})$ **と上からおさえるのはチョロいです。**

まぁこれで 200 桁というのはわかりますが，下からの評価もきっちりとしましょう。

$\dfrac{10^{210}}{10^{11}} < \dfrac{10^{210}}{10^{10}+3}$ **なので，これもチョロいですね。**

問題は後半の 1 の位問題です。

自分が解く中で一番頭を使った部分がここですが，自分は

「数の割り算というより，式の割り算として何かできないか？」
（一般化して何かできないか？）
ということを考えました。

気持ちの上で，$\dfrac{x^{210}}{x^{10}+3}$ みたいな感覚で何かできないか？ということです。

こうしてみると，$\dfrac{210\text{ 次式}}{10\text{ 次式}}$ というバリバリの仮分数ですから，セオリー的には帯分数の形にしたいところです。

とは言え，ガチンコの割り算は厳しいので，一つずつ括っていきました。

そうしたら規則性が現れ，最後には使いどころの分からなかった 3^{21} が登場します。
（この感動をぜひ体感してほしいです。）

ここまでいくと，もうあとは手なりに進んでいきます。
（ここから先は 解答 をご覧ください）

解答

$10^{10}<10^{10}+3<10^{11}$ より，$\dfrac{10^{210}}{10^{11}}<\dfrac{10^{210}}{10^{10}+3}<\dfrac{10^{210}}{10^{10}}$，すなわち

$10^{199}<\dfrac{10^{210}}{10^{10}+3}<10^{200}$ となり，$\dfrac{10^{210}}{10^{10}+3}$ は 200 桁である。… 答

$$\begin{aligned}
\frac{10^{210}}{10^{10}+3} &= \frac{10^{200}(10^{10}+3)-3\cdot 10^{200}}{10^{10}+3}\\
&=10^{200}-3\cdot\frac{10^{200}}{10^{10}+3}\\
&=10^{200}-3\cdot\left\{\frac{10^{190}(10^{10}+3)-3\cdot 10^{190}}{10^{10}+3}\right\}\\
&=10^{200}-3\cdot\left\{10^{190}-3\cdot\frac{10^{190}}{10^{10}+3}\right\}\\
&=10^{200}-3\cdot 10^{190}+3^2\cdot\frac{10^{190}}{10^{10}+3}
\end{aligned}$$

無理やり $10^{10}+3$ で括って帳尻合わせ

$$\begin{aligned}
&=10^{200}-3\cdot 10^{190}+3^2\left\{\frac{10^{180}(10^{10}+3)-3\cdot 10^{180}}{10^{10}+3}\right\}\\
&=10^{200}-3\cdot 10^{190}+3^2\left\{10^{180}-3\cdot\frac{10^{180}}{10^{10}+3}\right\}\\
&=10^{200}-3\cdot 10^{190}+3^2\cdot 10^{180}-3^3\cdot\frac{10^{180}}{10^{10}+3}\\
&=\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&=10^{200}-3\cdot 10^{190}+3^2\cdot 10^{180}-3^3\cdot 10^{170}+\cdots\cdots-3^{19}\cdot 10^{10}+3^{20}\cdot\frac{10^{10}}{10^{10}+3}\\
&=10^{200}-3\cdot 10^{190}+3^2\cdot 10^{180}-3^3\cdot 10^{170}+\cdots\cdots-3^{19}\cdot 10^{10}+3^{20}\left(\frac{10^{10}+3-3}{10^{10}+3}\right)\\
&=10^{200}-3\cdot 10^{190}+3^2\cdot 10^{180}-3^3\cdot 10^{170}+\cdots\cdots-3^{19}\cdot 10^{10}+3^{20}\left(1-\frac{3}{10^{10}+3}\right)\\
&=10^{200}-3\cdot 10^{190}+3^2\cdot 10^{180}-3^3\cdot 10^{170}+\cdots\cdots-3^{19}\cdot 10^{10}+3^{20}-\frac{3^{21}}{10^{10}+3}
\end{aligned}$$

このあたりでだいぶ規則性が見えてきます。

$10^{200}-3\cdot 10^{190}+3^2\cdot 10^{180}-3^3\cdot 10^{170}+\cdots\cdots-3^{19}\cdot 10^{10}$ は 10 の倍数であり，1 の位に影響はない。

1 の位に影響するのは $3^{20}-\dfrac{3^{21}}{10^{10}+3}$ の部分。

3^n の 1 の位は 3，9，7，1 の繰り返しなので，3^{20} の 1 の位は 1

$\dfrac{3^{21}}{10^{10}+3}$ について，$\dfrac{3^{21}}{10^{10}+3}=1+\dfrac{460353200}{10^{10}+3}$

$$\begin{array}{r}
1\\
10000000003\,\overline{)\,10460353203}\\
\underline{10000000003}\\
460353200
\end{array}$$

よって $\dfrac{10^{210}}{10^{10}+3}=(10\text{ の倍数})+3^{20}-\left(1+\dfrac{460353200}{10^{10}+3}\right)$
$=***\cdots***1-(1.***\cdots)$

ゆえに求める整数部分の 1 の位は 9 … 答

【総括】

桁数についてはきっちりと確保したいところです。

また，数学において仮分数（頭でっかち）は，あまりいい形ではありません。

仮分数を帯分数になおすことは，”式”に対してはよくやる常套手段ですが，今回はそのセオリーが助けてくれました。

さて，解き終わった後，今にして思えば … という話です。

$$\frac{10^{210}}{10^{10}+3}=\underbrace{10^{200}-3\cdot10^{190}+3^2\cdot10^{180}-3^3\cdot10^{170}+\cdots\cdots-3^{19}\cdot10^{10}+3^{20}}_{\text{この部分は公比 }-\frac{3}{10^{10}}\text{ の等比数列の和}}-\frac{3^{21}}{10^{10}+3}$$

ですから，この等比数列の和の部分を計算すると，

$$\frac{10^{200}\left\{1-\left(-\frac{3}{10^{10}}\right)^{21}\right\}}{1+\frac{3}{10^{10}}}=\frac{10^{210}+3^{21}}{10^{10}+3}$$

となります。

$x=10^{10}$，$y=3$ とすると，

$$\frac{x^{21}+y^{21}}{x+y}=\frac{(x+y)(x^{20}-x^{19}y+\cdots-xy^{19}+y^{20})}{x+y}$$

つまり，$\frac{10^{210}+3^{21}}{10^{10}+3}$ は割り切れ，$\frac{10^{210}+3^{21}}{10^{10}+3}=M$（$M$：整数）とおくと

$$\frac{10^{210}}{10^{10}+3}=\frac{10^{210}+3^{21}-3^{21}}{10^{10}+3}=M-\frac{3^{21}}{10^{10}+3}$$

さらに，$M=x^{20}-x^{19}y+\cdots-xy^{19}+y^{20}$ で，$x\equiv0\pmod{10}$ なので，

$$M\equiv y^{20}\pmod{10}$$

となり，解答に合流します。

つまり，$\frac{10^{210}}{10^{10}+3}$ ではなく，$\frac{10^{210}+3^{21}}{10^{10}+3}$ を相手にすることが見えれば早かったことになります。（とは言え，そこまでスムーズにいくのは難しいでしょう。）