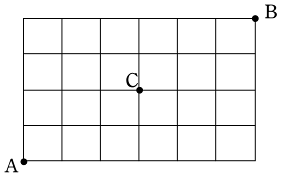
最短経路と直進距離に関する考察

右の図のような道路の図において，最も小さい正方形の 1 辺の長さは 1 m であるとする。



(1)　A 地点から B 地点まで最短距離で行く経路は何通りあるか求めよ。

(2)　A 地点から B 地点まで最短距離で行く経路のうち，C 地点を通らないものは何通りあるか求めよ。

(3)　A 地点から B 地点まで最短距離で行く経路のうち，その経路に含まれる最も長い直線路の長さが 5 m 以上であるものは何通りあるか求めよ。

(4)　A 地点から B 地点まで最短距離で行く経路のうち，その経路に含まれる最も長い直線路の長さが 4 m 以上であるものは何通りあるか求めよ。

＜ '10 高知大 ＞

【戦略】

(1)，(2) は矢印の並べ方を考える典型的な問題です。
C 地点を通らないものよりも，C 地点を通る方が数えやすいことから余事象を考えます。

(3)，(4) については直進する距離に関する考察問題で，パターン問題というよりは解決に至るまでの思考力を問う問題です。

何 m か直進するということは，矢印の "塊" を考えることになるでしょう。ただし，同じものを含む中での並べ方なので，注意が必要になります。

(3) は 「6 m 直進の場合」は Easy です。

6 m 直進することを ⇨6 と表すと

⇨6 ↑↑↑↑ の並べ替えを考えればよいことになります。

「5 m 直進の場合」は 5 m 直進することを ⇨5 と表すと

⇨5 →↑↑↑↑の並べ方を考えることになります。

しかし，例えば

⇨5 →↑↑↑↑ や →⇨5 ↑↑↑↑

という並びは結果的に 6 m 直進してしまっています。

したがって，⇨5 と → が隣り合わないような並べ方を考えればよいということになります。

隣り合わないようにするためには，「隙間に放り込む」のが鉄板の考え方です。

(4) の 4 m 直進は $\left\{\begin{array}{l}\text{右に 4 m 直進}\\ \text{上に 4 m 直進}\end{array}\right.$ があって混乱をするかもしれませんが

右に4m ＼ 上に 4m	あり	なし
あり		
なし		題意不成立

ここが →→→↑↑↑↑→→→ しかないことに注目し

右に4m ＼ 上に 4m	あり	なし
あり		
なし		

こう場合分けします。

解答

(1)　右に 1 m 進むことを →，上に 1 m 進むことを ↑と表す。

→→→→→→↑↑↑↑の並べ方を考えればよい。

この矢印を並べる 10 カ所から ↑を置く 4 カ所を選んで並べればよく，求める場合の数は

$$ {}_{10}C_4=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} =210 \text{【通り】} \cdots \text{答} $$

(2)　A 地点から B 地点まで最短距離で行く経路のうち，C 地点を経由する場合の数を求める。

A から C への行き方は →→→↑↑の並べ方を考えて ${}_5C_2$【通り】
C から B への行き方は →→→↑↑の並べ方を考えて ${}_5C_2$【通り】

よって，A 地点から B 地点まで最短距離で行く経路のうち，C 地点を経由する場合の数は

$$ {}_5C_2\times{}_5C_2=100 \text{【通り】} $$

ゆえに，A 地点から B 地点まで最短距離で行く経路のうち，C 地点を経由しない場合の数は

$$ 210-100=110 \text{【通り】} \cdots \text{答} $$

(3)　(i) 最も長い直線路が 6 m であるとき

6 m 直進することを ⇨6 と表すと

⇨6 ↑↑↑↑ の並べ替えを考えればよく，${}_5C_1=5$【通り】

(ii) 最も長い直線路が 5 m であるとき

5 m 直進することを ⇨5 と表すと

⇨5 →↑↑↑↑の並べ方のうち，⇨5 と → が隣り合わないような並べ方を考えればよい。

先に↑↑↑↑を並べる。

＾↑＾↑＾↑＾↑＾　＜図 1 ＞の 5 カ所の隙間から 2 カ所選んで

＜図 1 ＞　　⇨5 と →を入れればよい

よって，${}_5P_2=20$【通り】

(i)，(ii) より，求める場合の数は $5+20=25$【通り】… 答

(4)　(iii) 最も長い直線路が 4 m であるとき

(iii−1)　右方向へちょうど 4 m 直進することがあるとき

4 m 直進することを $\boxed{4}$ と表すと

$\boxed{4}$ →→↑↑↑↑の並べ方のうち，$\boxed{4}$ と → が隣り合わないような並べ方を考えればよい。

- $\boxed{4}$↑ ＿ ＿ ＿ ＿ ＿ というタイプは ${}_5C_2=10$ 【通り】
- ＿ ＿ ＿ ＿ ＿ ↑ $\boxed{4}$ というタイプは ${}_5C_2=10$ 【通り】
- 上の 2 タイプ以外について

↑ $\boxed{4}$ ↑ を 1 つの塊とみなして X と呼ぶ。

X ↑↑→→ の並べ方を考えて $\dfrac{5!}{2!2!}=30$ 【通り】

よって，右方向へちょうど 4 m 直進することがあるような経路は

$10+10+30=50$ 【通り】

(iii−2)　右方向へちょうど 4 m 直進することがないとき

→→→↑↑↑↑→→→

という 1 通りの並べ方しかない。

よって (iii) の場合の数は $50+1=51$ 【通り】

(3) の結果もあわせて，求める場合の数は

$25+51=76$ 【通り】… 答

【総括】

(1)，(2) までは手が止まることがあってはなりません。

(3)，(4) は様々なことを考えて混乱してしまうかもしれません。

結局は直進する距離が 6 m，5 m，4 m と分けて考えるのが一番シンプルだと思います。

特に 6 m のときはかなり Easy ですから，実質的な負担は 5 m と 4 m の場合のみです。

(4) の 4 m のときですが，$\boxed{4}$ と → が隣り合わないという点は (3) の 5 m のときと同じですが，→が 2 つあるという点で厄介です。

先に ↑↑↑↑を並べて隙間に並べるということはできません。
→ と → は隣り合っても許されるからです。

だからといって，先に →→ ↑ ↑ ↑ ↑ を先に並べておいて
隙間に $\boxed{4}$ を入れるのも → と隣り合わないというルールによって，隙間の位置が case by case となってしまい難しいですね。

視点を切り替えて，$\boxed{4}$ の前後は↑ という捉え方にシフトできたかどうかが山場だと思われます。

そこまで考えられれば，↑$\boxed{4}$↑という塊をつくるというアイデアに自然に辿り着けるのではないでしょうか。

もちろん $\boxed{4}$ が端っこかどうかということにも気をつけて場合分けしましょう。

隣り合わないことの処理を $\left\{\begin{array}{l}\text{隙間に放り込む}\\\text{その前後を埋める}\end{array}\right.$ という 2 つのアイデアで乗り切る必要があり，思考力や柔軟性が必要な問題だったと思います。