

整数部分と小数部分を扱った数列

α は $0 < \alpha < 1$ をみたく実数とする。任意の自然数 n に対して、 $2^{n-1}\alpha$ の整数部分を a_n とし、 $2^{n-1}\alpha = a_n + b_n$ とおくと、

$$n \text{ が奇数のとき } 0 \leq b_n < \frac{1}{2}$$

$$n \text{ が偶数のとき } \frac{1}{2} < b_n < 1$$

になるという。 a_n 、および α を求めよ。

< '81 東京工業大 >

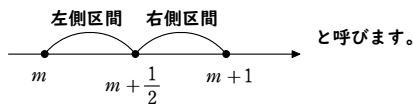
【戦略】

$2^{n-1}\alpha$ をどう見るかですが、自分は

初項 α 、公比 2 の等比数列

と見ました。(以後のために $c_n = 2^{n-1}\alpha$ と名前をつけておきます。)

「どんどん 2 をかけていく」操作の中で、小数部分が $\frac{1}{2}$ ($=0.5$) よりも
右か左かを考えていくことになります。



皆目見当もつかないので、とりあえず初項の α がどんなものなのか「アタリ」をつけたいと思います。

まず $c_1 = \alpha$ なので、小数部分 $b_1 = \alpha$ となります。条件より $0 < \alpha < 1$ なのでこれが左側区間に入っていなければならず、 $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ ということになります。

これに 2 をかけると、 $0 < 2\alpha < 1$ ということになりますので、 $b_2 = 2\alpha$ です。

今度はこれが右側区間に入っていることになり、 $\frac{1}{2} < 2\alpha < 1$ を満たしていることになります。

先ほどと合わせると、
$$\begin{cases} 0 < \alpha < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2} \end{cases}$$
 をいずれも満たすので、 $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2}$

ということになります。

実験するとしたらできる限り簡単なものでやりたいところですから、 $\alpha = \frac{1}{3}$ あたりで実験してみます。

$$c_1 = \frac{1}{3} \text{ (OK)} \quad c_2 = \frac{2}{3} \text{ (OK)} \quad c_3 = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3} \text{ (OK)}$$

$$c_4 = 2 + \frac{2}{3} \text{ (OK)} \quad c_5 = 4 + \frac{4}{3} = 5 + \frac{1}{3} \text{ (OK)} \quad c_6 = 10 + \frac{2}{3} \text{ (OK)}$$

ということで、 $b_1 = b_3 = b_5 = \dots = \frac{1}{3}$ 、 $b_2 = b_4 = b_6 = \dots = \frac{2}{3}$ という予想がたちます。

証明も帰納法なりなんなりでなんとかなりそうです。

$\alpha = \frac{1}{3}$ が題意を満たす(であろう)ことは分かりましたが、ここで大きな壁にぶち当たります。それは「 $\alpha = \frac{1}{3}$ 以外に題意を満たすものはないか？」という疑問です。

これ以上実験してもいいですが、 α が無理数のときなどはどう検証する？ということになってきますし、キリがなさそうなので、ここで実験はいったん打ち切ります。

ただ、先ほどの実験でおぼろげながら構造が見えるでしょうか？

結局、小数部分を 2 倍したときに $0.\bullet\bullet\dots$ なのか $1.\bullet\bullet\dots$ なのかで話が変わってくるわけです。

そうなってくると、これまでよく分からなかった与えられた条件の使い方が見えてきます。

$c_{n+1} = 2c_n$ なので、 $a_{n+1} + b_{n+1} = 2a_n + 2b_n$ が成り立ちます。

$0 < b_n < \frac{1}{2}$ であれば、 $0 < 2b_n < 1$ で、 $b_{n+1} = 2b_n$ ということになりますし

$\frac{1}{2} < b_n < 1$ であれば、 $1 < 2b_n < 2$ で、 $b_{n+1} = 2b_n - 1$ ということになります。

もう漸化式を立てる気満々になってきますね。

偶奇で場合分けをすると

$$c_{2m+2} = 2a_{2m+1} + 2b_{2m+1} \text{ で条件より、} 0 \leq b_{2m+1} < \frac{1}{2} \text{ なので、}$$

$$0 \leq 2b_{2m+1} < 1$$

となり、 c_{2m+2} の整数部分は $2a_{2m+1}$ 、小数部分は $2b_{2m+1}$ となります。

$$\text{したがって、} \begin{cases} a_{2m+2} = 2a_{2m+1} & \dots \text{ ①} \\ b_{2m+2} = 2b_{2m+1} \end{cases}$$

$$\text{同様に、} c_{2m+1} = 2a_{2m} + 2b_{2m} \text{ で、条件より } \frac{1}{2} < b_{2m} < 1 \text{ なので、}$$

$$1 < 2b_{2m} < 2$$

となり、 c_{2m+1} の整数部分は $2a_{2m} + 1$ 、小数部分は $2b_{2m} - 1$ となります。

$$\text{したがって、} \begin{cases} a_{2m+1} = 2a_{2m} + 1 & \dots \text{ ②} \\ b_{2m+1} = 2b_{2m} - 1 \end{cases} \text{ という漸化式がたちました。}$$

あとはこの漸化式の処理ということになります。

②を①に代入すれば構造上見慣れた漸化式になります。

あとは α の導出ですが、 $c_n = a_n + b_n$ より、 $2^{n-1}\alpha = a_n + b_n$ ですから

$$\alpha = \frac{1}{2^{n-1}}(a_n + b_n) \text{ と見ればよいでしょう。}$$

$b_1 = \alpha$ ですから、 b_n の方は α を含んだ式になると思います。

したがって、最後は α の方程式を解けばおしまいです。

解答

$$c_n = 2^{n-1} \alpha \text{ とすると, } c_n = a_n + b_n$$

$$\text{一方, } c_{n+1} = 2c_n \text{ であり, } a_{n+1} + b_{n+1} = 2a_n + 2b_n$$

$$\text{また, } c_1 = \alpha \text{ で, 条件 } 0 < \alpha < 1 \text{ より, } a_1 = 0, b_1 = \alpha$$

ここで, m を自然数として

$$a_{2m+2} + b_{2m+2} = 2a_{2m+1} + 2b_{2m+1} \text{ であり, } 2a_{2m+1} \text{ は必ず整数である。}$$

$$\text{条件より, } 0 \leq b_{2m+1} < \frac{1}{2}, \text{ すなわち } 0 \leq 2b_{2m+1} < 1 \text{ なので,}$$

$$c_{2m+2} \text{ の整数部分は } 2a_{2m+1}, \text{ 小数部分は } 2b_{2m+1}$$

となる。

$$\text{ゆえに, } \begin{cases} a_{2m+2} = 2a_{2m+1} & \dots \text{ ①} \\ b_{2m+2} = 2b_{2m+1} \end{cases}$$

$$\text{一方, } c_{2m+1} = 2a_{2m} + 2b_{2m} \text{ で, 条件より } \frac{1}{2} < b_{2m} < 1,$$

$$\text{すなわち } 1 < 2b_{2m} < 2 \text{ となる。}$$

これより,

$$c_{2m+1} \text{ の整数部分は } 2a_{2m} + 1, \text{ 小数部分は } 2b_{2m} - 1$$

となる。

$$\text{ゆえに, } \begin{cases} a_{2m+1} = 2a_{2m} + 1 & \dots \text{ ②} \\ b_{2m+1} = 2b_{2m} - 1 \end{cases}$$

$$\text{② を ① に代入すると, } \begin{cases} a_{2m+2} = 4a_{2m} + 2 \\ b_{2m+2} = 4b_{2m} - 2 \end{cases}$$

$$a_{2m} = A_m, b_{2m} = B_m \text{ とおくと, } \begin{cases} A_{m+1} = 4A_m + 2 \\ B_{m+1} = 4B_m - 2 \end{cases} \dots \text{ ③}$$

$$\text{③ の第 1 式は } A_{m+1} + \frac{2}{3} = 4 \left(A_m + \frac{2}{3} \right) \text{ と変形でき,}$$

$$A_m + \frac{2}{3} = \left(A_1 + \frac{2}{3} \right) \cdot 4^{m-1}$$

$$\begin{aligned} a_{2m} + \frac{2}{3} &= \left(a_2 + \frac{2}{3} \right) \cdot 4^{m-1} \\ &= \left(0 + \frac{2}{3} \right) \cdot 4^{m-1} \quad (\because a_2 = 2a_1 = 0) \end{aligned}$$

$$\text{よって, } a_{2m} = \frac{2}{3} (4^{m-1} - 1)$$

$$\text{② の第 1 式に代入すると, } \begin{aligned} a_{2m+1} &= 2a_{2m} + 1 \\ &= \frac{4^m - 1}{3} \quad (m = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

これに $m = 0$ を代入すると, $a_1 = 0$ を得るため,

$$a_{2m-1} = \frac{4^{m-1} - 1}{3} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

$$\begin{aligned} \text{これより, } a_n &= \begin{cases} \frac{4^{\frac{n-1}{2}} - 1}{3} & (n \text{ が奇数のとき}) \\ \frac{2(4^{\frac{n-2}{2}} - 1)}{3} & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{2^{n-1} - 1}{3} & (n \text{ が奇数のとき}) \\ \frac{2^{n-1} - 2}{3} & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases} \\ &= \frac{2^{n-1}}{3} - \frac{1 + \frac{1 + (-1)^n}{2}}{3} \\ &= \frac{2^n + (-1)^{n-1} - 3}{6} \dots \text{ ㊦} \end{aligned}$$

ここは無理に変形する必要はないかもしれません。

$$\text{また, ③ の第 2 式より, } B_{m+1} - \frac{2}{3} = 4 \left(B_m - \frac{2}{3} \right)$$

$$B_m - \frac{2}{3} = \left(B_1 - \frac{2}{3} \right) \cdot 4^{m-1}$$

$$\begin{aligned} b_{2m} - \frac{2}{3} &= \left(b_2 - \frac{2}{3} \right) \cdot 4^{m-1} \\ &= \left(2b_1 - \frac{2}{3} \right) \cdot 4^{m-1} \\ &= \left(2\alpha - \frac{2}{3} \right) \cdot 2^{2m-2} \\ &= \left(\alpha - \frac{1}{3} \right) \cdot 2^{2m-1} \end{aligned}$$

$$\text{よって, } b_{2m} = \frac{2}{3} + \left(\alpha - \frac{1}{3} \right) \cdot 2^{2m-1}$$

$$\begin{aligned} \text{② の第 2 式に代入すると, } b_{2m+1} &= 2b_{2m} - 1 \\ &= \frac{4}{3} + \left(\alpha - \frac{1}{3} \right) \cdot 2^{2m} - 1 \\ &= \frac{1}{3} + \left(\alpha - \frac{1}{3} \right) \cdot 2^{2m} \quad (m = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

$$\text{これに } m = 0 \text{ を代入すると, } b_1 = \frac{1}{3} + \left(\alpha - \frac{1}{3} \right) = \alpha \text{ より}$$

$$b_{2m-1} = \frac{1}{3} + \left(\alpha - \frac{1}{3} \right) \cdot 2^{2m-2} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

$$\begin{aligned} \text{これより, } b_n &= \begin{cases} \frac{1}{3} + \left(\alpha - \frac{1}{3} \right) \cdot 2^{n-1} & (n \text{ が奇数のとき}) \\ \frac{2}{3} + \left(\alpha - \frac{1}{3} \right) \cdot 2^{n-1} & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases} \\ &= \left(\alpha - \frac{1}{3} \right) \cdot 2^{n-1} + \frac{1 + \frac{1 + (-1)^n}{2}}{3} \\ &= \frac{3(3\alpha - 1) \cdot 2^{n-1} + 3 + (-1)^n}{6} \end{aligned}$$

$$c_n = a_n + b_n \text{ より, } 2^{n-1} \alpha = a_n + b_n$$

$$\begin{aligned} \text{よって, } \alpha &= \frac{1}{2^{n-1}} (a_n + b_n) \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \left\{ \frac{2^n + (-1)^{n-1} - 3}{6} + \frac{3(3\alpha - 1) \cdot 2^{n-1} + 3 + (-1)^n}{6} \right\} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{(9\alpha - 2) \cdot 2^n}{6} \\ &= \frac{9\alpha - 2}{3} \end{aligned}$$

$$\text{これより } \alpha = \frac{1}{3} \dots \text{ ㊦}$$

【総括】

まずは題意をしっかりと把握しましょう。

そのためには実験などを通じて、この数列がどんなメカニズムで動いているのかを肌で感じる事が大切です。

最初からすんなり漸化式を導入できた人もいます。

そういう鋭い方からすると、私がとった【戦略】の内容に泥臭さや、急所への到達の遅さを感じたかもしれません。

私の場合、実験によってたまたま $\alpha = \frac{1}{3}$ という題意を満たす値を見出しましたが、かえってそれが漸化式を作る方針を頭から遠ざけてしまい、時間がかかりました。

漸化式が立式できてからは手なりに進んでいってほしいところです。

代表的な形の漸化式の処理については、きっちりと準備しておきましょう。