e を自然対数の底とする。e^e に最も近い整数を求めよ。
必要ならば次の近似値を用いよ。

$$e=2.718,\ \log 2=0.693,\ \log 3=1.099,\ \log 5=1.609$$

＜ ’92 北海道大 ＞

【戦略】

与えられた近似値を単純に使うと，$2.718^2<e^e<2.718^3$ **とやる人が多いのではないでしょうか。(もちろん手計算できる範囲で評価するとなると，**2**乗と** 3 **乗で挟むことになると思います。)**

ただ，これを頑張って計算しても $7.387524<e^e<20.079290232$ **と大した情報は得られません。**

そこでまずは整数部分を調べることにしましょう。

$m<e^e<m+1$ **となるような自然数** m **を見つけたいのです。**

与えられた近似値は対数についての情報なので，これを活用しようと思うと

$\log m<\log e^e<\log(m+1)$，**すなわち**

$$\log m<2.718<\log(m+1)$$

を満たす自然数 m **を探すことになります。**

与えられた対数単品では全然 2.718 **に届きませんが，**$\log 3$ **と** $\log 5$ **を加えた** $\log 15$ **が** 2.718 **に結構近いと分かります。**

そこで $\log 16$ **を調べてみると，**$\log 16=4\log 2=2.772$ **ですから** $\log 15<e<\log 16$ **ということで，**$m=15$ **だと分かりました。**

あとは e **と** $\dfrac{31}{2}$ $(=15.5)$ **との大小ですが，**$\log\dfrac{31}{2}$ **は与えられた条件では計算不可能です。**
そこで，凸性を利用して，$\log\dfrac{15+16}{2}>\dfrac{\log 15+\log 16}{2}$ **であることを用いていきます。**
(**形からこれをインスピレーションするには経験がものをいいます。**)

解答

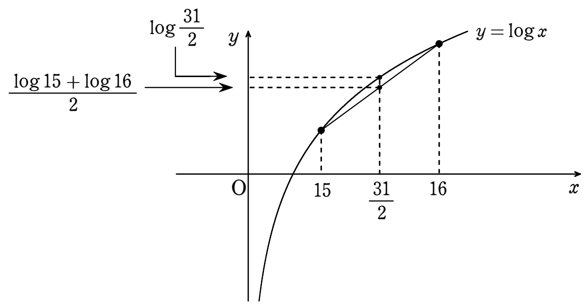
$\log 3+\log 5=1.099+1.609=2.708$ より，$\log 15=2.708$

一方，$4\log 2=4\times 0.693=2.772$ より，$\log 16=2.772$

これより，$\log 15<2.718<\log 16$

すなわち $\log 15<e<\log 16$ ($\Leftrightarrow$ $\log 15<\log e^e<\log 16$)

ゆえに，$15<e^e<16$ …①



ここで，$y=\log x$ は上に凸なので，$\dfrac{\log 15+\log 16}{2}<\log\dfrac{15+16}{2}$

すなわち，$\dfrac{2.708+2.772}{2}<\log 15.5$ で，$2.74<\log 15.5$ を得る。

$e<2.74$ であるから，$e<\log 15.5$

よって，$\log e^e<\log 15.5$ が成り立つので，$e^e<15.5$ …②

①，② より，$15<e^e<15.5$ であるので，

e^e に最も近い整数は 15 … 答

【戦略２】

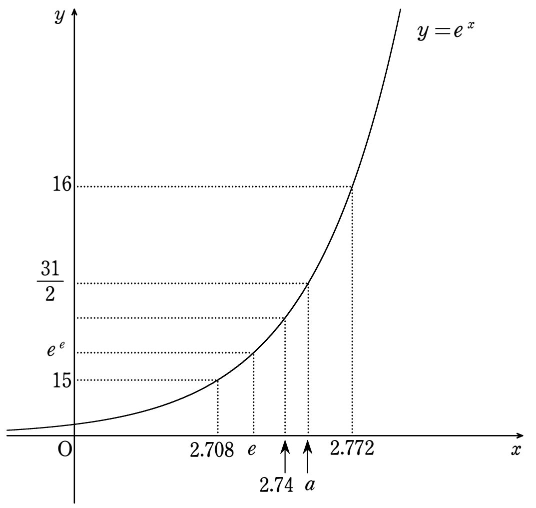
基本的には 解答 の方針と同じなのですが，$y=e^x$ という関数を主体に考えてもよいでしょう。

その場合，与えられた近似値を

$$e^{0.693}=2,\ e^{1.099}=3,\ e^{1.609}=5$$

と見ることになります。

別解



$15=3\times5=e^{1.099}\times e^{1.609}=e^{2.708}$

$e^e=e^{2.718}$

$16=2^4=(e^{0.693})^4=e^{2.772}$

$e^{2.708}<e^{2.718}<e^{2.772}$ より，$15<e^e<16$ …① を得る。

ここで，$e^a=\dfrac{31}{2}$（$=15.5$）となる a について

$$\begin{aligned} a&=\log\frac{15+16}{2}\\ &>\frac{\log 15+\log 16}{2}\quad(\because\ y=\log x\text{ は上に凸})\\ &=2{,}74\\ &>e \end{aligned}$$

ゆえに，$e^e<e^a$（$=15.5$）…②

①，② より，$15<e^e<15.5$ だから，e^e に最も近い整数は 15 … 答

【総括】

機械的なパターンに当てはめてどうにかなる類の問題ではないでしょう。

$2.718^2<e^e<2.718^3$ から $7.387524<e^e<20.079290232$ を得ることぐらいはできるかもしれませんが，そこから手が動くかどうかは，自分であ～だこ～だ考えてきた経験をしてきたかがモノをいうと思います。

最も近い整数の前にそもそもの整数部分を調べようという気になりましょう。

今回は $15<e^e<16$ を得た後は「どちらに近いかを調べたい」わけですから，$e^a=\dfrac{31}{2}$ となる a の値，すなわち，$\log\dfrac{31}{2}$ に興味がいくわけです。

それを調べるために，凸性を利用しました。

このように，数学における「次の一手」のほとんどは

「○○したい」「○○に興味がある」

といった素朴な願望です。

もちろんその興味をもったことを調べるためには，手にまめができるような計算技法や，典型問題の処理や経験の積み重ねが必要です。