$\int_0^{\pi} e^x \sin^2 x\, dx > 8$ であることを示せ。

ただし，$\pi = 3.14\cdots$ は円周率，$e = 2.71\cdots$ は自然対数の底である。

＜ '99 東京大 ＞

【戦略】

与えられた定積分は実際に計算可能です。

偶数乗なので半角公式で次数を下げれば，結局は $\int e^x \cos 2x\, dx$ の積分計算が決め手となります。

これについては

部分積分を 2 回行い「同型出現」

または

$$(e^x \cos 2x)' = e^x \cos 2x - 2e^x \sin 2x \quad \cdots ①$$
$$(e^x \sin 2x)' = e^x \sin 2x + 2e^x \cos 2x \quad \cdots ②$$

から　①＋2×② で $e^x \sin 2x$ の項を消して両辺積分

のいずれかの方針で処理します。（いずれにせよ基本的な積分計算です。）

ここでは後者で処理します。

この定積分の計算により，結局示すべき不等式は $e^{\pi} > 21$ という不等式に帰着します。

当然具体的な数に対して我々ができることはほとんど何もありません。

そこで，$e^{\pi} \to e^x$ と拡張して微分法のテリトリーに引きずり込みます。

接線というのが「1 次近似」ということを鑑みて，π に最も近い整数 3 に注目し，$(3,\, e^3)$ における接線を考えて評価することを考えたいと思います。

解答

$$\int_0^{\pi} e^x \sin^2 x\, dx = \int_0^{\pi} e^x \cdot \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^x - e^x \cos 2x\, dx$$

ここで，

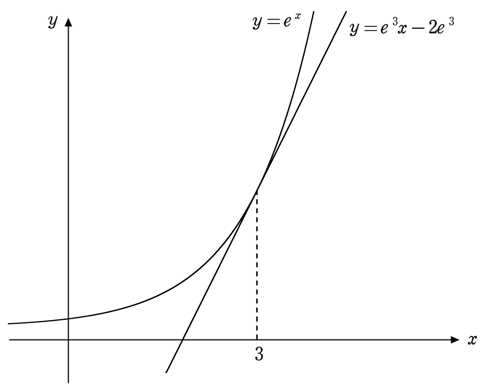
$$(e^x \cos 2x)' = e^x \cos 2x - 2e^x \sin 2x \quad \cdots ①$$
$$(e^x \sin 2x)' = e^x \sin 2x + 2e^x \cos 2x \quad \cdots ②$$

①＋2×② より，$(e^x \cos 2x + 2e^x \sin 2x)' = 5e^x \cos 2x$

ゆえに，$\int e^x \cos 2x\, dx = \frac{1}{5}(e^x \cos 2x + 2e^x \sin 2x) + C$（$C$ は積分定数）

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} e^x \sin^2 x\, dx &= \frac{1}{2}\left[e^x - \frac{1}{5}(e^x \cos 2x + 2e^x \sin 2x)\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{2}\left\{e^{\pi} - \frac{1}{5}e^{\pi} - \left(e^0 - \frac{1}{5}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{4}{5}e^{\pi} - \frac{4}{5}\right\} \\ &= \frac{2}{5}(e^{\pi} - 1)\end{aligned}$$

したがって，$\frac{2}{5}(e^{\pi} - 1) > 8$，すなわち $e^{\pi} > 21 \cdots (*)$ を示せばよい。



$f(x) = e^x$ に対して，$f'(x) = e^x$ なので，$y = e^x$ 上の点 $(3,\, e^3)$ における接線の式は

$y = e^3(x-3) + e^3$，すなわち $y = e^3 x - 2e^3$（$= g(x)$ とおく）

$f''(x) = e^x > 0$ で，$y = e^x$ は下に凸だから，$f(\pi) > g(\pi)$

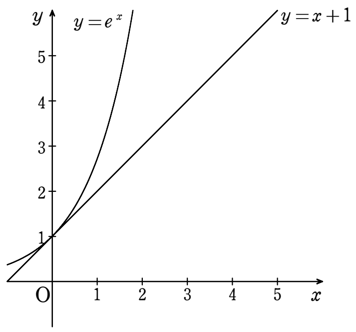
すなわち，$e^{\pi} > e^3 \pi - 2e^3 = (\pi - 2)e^3 > (3.1 - 2) \cdot 2.7^3 = 21.6513 > 21$ を得て，$e^{\pi} > 21$

$(*)$ が示されたので，題意も示された。

【戦略２】$e^{\pi}>21$ を示す部分

e^{π} を評価するにあたり，有名不等式 $e^{x}\geqq x+1$ を利用することも考えられます。

ただし，



というグラフから見て分かるとおり，$e^{x}\geqq x+1$ という不等式は $x=0$ の近辺であればあるほど精度の高い不等式です。(**$x=\pi$ の付近ではガバガバ)**

そこで，$e^{\pi}=e^{3}\cdot e^{\pi-3}>e^{3}\cdot e^{0.14}$ と見て，$e^{0.14}$ に対して $e^{x}\geqq x+1$ という不等式で評価してみます。

別解

$f(x)=e^{x}-(x+1)$ と設定すると，$f'(x)=e^{x}-1$ で，

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

これより，$f(x)\geqq 0$，すなわち $e^{x}\geqq x+1$ $\cdots$ (A) が成立する。
(等号成立は $x=0$ のとき)

(A) に $x=0.14$ を代入すると，$e^{0.14}>1.14$

よって，$e^{\pi}=e^{3}\cdot e^{\pi-3}>e^{3}\cdot e^{0.14}>(2.7)^{3}\cdot 1.14=22.43862>21$ となり，
(∗) が示されたので，題意も示された。

<コメント>
結果的に $e^{\pi}>22$ という本問で求められているよりも強い結果が示せました。
これは，$x=0$ 付近の方が $y=e^{x}$ の増加率が小さく，誤差が小さいためと考えられます。

【総括】

「$e^{\pi}>21$ を示せばよい」という部分までは手が止まってはいけません。

数値評価をする際，接線を活用するという発想に至るためには

「接線の式とは 1 次近似である」

ということを勉強していなければなりません。

複雑な関数を 1 次関数という一番計算しやすい関数で近似するところに微分の ”旨み ” があります。もちろんそれなりの精度の近似が出せる範囲は限られますが。

この「それなりの精度の近似が出せる範囲」を広げるのが大学以降で本格的に学ぶテイラー展開，マクローリン展開という多項式近似です。