$a>0$ とする。以下の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底である。

(1) $0\leqq x\leqq a$ を満たす x に対して，$1+x\leqq e^x\leqq 1+\dfrac{e^a-1}{a}x$ を示せ。

(2) $1+a+\dfrac{a^2}{2}<e^a<1+\dfrac{a}{2}(e^a+1)$ を示せ。

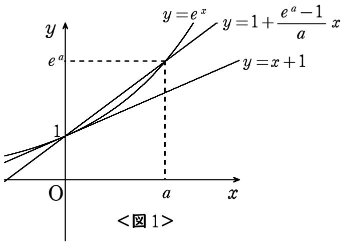
(3) $2.64<e<2.78$ を示せ。

＜ '10 横浜市立大 ＞

【戦略】

(1) の不等式証明は手なりに微分を用いて処理すればよいでしょう。
左側の不等式は瞬殺レベルですが，右側は多少手数が必要です。

別解 としては



<図 1>

というグラフ ＜図 1＞ を考える方針も考えられます。その場合，$y=e^x$ が下に凸であることを言う必要がありますし，厳密さをどこまで認められるかという点で不安ではあります。

(2) は (1) で示した不等式との関連を考えると，(1) の辺々を積分したものということが見えてきますので，積分すれば一発 KO です。

(3) はそのまま $a=1$ を代入しても，$\dfrac{5}{2}<e<3$，すなわち $2.5<e<3$ という結果しか得られず，だいぶガバガバな結果です。

ここで (2) の不等式の意味を考えてみます。

元々 (2) は (1) の不等式の辺々を積分した

$$\int_0^a 1+x\,dx<\int_0^a e^x\,dx<\int_0^a\left(1+\frac{e^a-1}{a}x\right)dx$$

が元になっています。

定積分は面積という図形量を表すことを考えると ＜図 1＞のイメージがものをいうことになります。

＜図 1＞ を考えると，
　a が小さいほどこの不等式の誤差が小さい (精度が高まる) であろう
と分かります。

先ほどは $a=1$ として失敗しました。それより小さい a でなおかつ指数計算において我々が計算可能な a といえば次の候補は $a=\dfrac{1}{2}$ でしょう。

解答

(1) $f(x)=e^x-(1+x)$ $(0\leqq x\leqq a)$ とおく。

$f'(x)=e^x-1\geqq 0$ (∵ $x\geqq 0$) であり，$f(x)$ は $x\geqq 0$ の範囲で単調増加。

よって，$f(x)\geqq f(0)=0$ が成り立ち，$1+x\leqq e^x$ …① が成立する。

また，$g(x)=\left(1+\dfrac{e^a-1}{a}x\right)-e^x$ $(0\leqq x\leqq a)$ とおく。

$g'(x)=\dfrac{e^a-1}{a}-e^x$

$g''(x)=-e^x<0$ であり，$g'(x)$は単調減少。… ②

$$\begin{aligned} g'(0)&=\frac{e^a-1}{a}-1\\ &=\frac{e^a-(1+a)}{a}\\ &=\frac{f(a)}{a}\geqq 0 \ \cdots ③ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(a)&=\frac{e^a-1}{a}-e^a\\ &=\frac{(1-a)e^a-1}{a} \end{aligned}$$

$h(a)=(1-a)e^a-1$ $(a>0)$ とおくと，$h'(a)=-e^a+(1-a)e^a$
$=-ae^a<0$

ゆえに，$h(a)$ は単調減少であり，$a>0$ において，$h(a)<h(0)=0$

よって，$g'(a)<0$ …④

②，③，④ より，

$0\leqq x\leqq a$ の範囲に $g'(c)=0$ となる c がただ一つ存在する。

これより，$g(x)$ の $0\leqq x\leqq a$ における増減表は以下のようになる。

x	0	$\cdots$	c	$\cdots$	a
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	↗	極大	↘	0

この増減表より，$0\leqq x\leqq a$ において $g(x)\geqq 0$

すなわち，$e^x\leqq 1+\dfrac{e^a-1}{a}x$ …⑤

①，⑤ より $0\leqq x\leqq a$ を満たす x に対して，$1+x\leqq e^x\leqq 1+\dfrac{e^a-1}{a}x$ が成立する。

© MathClinic

(2)　(1) の不等式において，等号は常には成立しないことから，

$$\int_0^a 1+x\,dx<\int_0^a e^x\,dx<\int_0^a\left(1+\frac{e^a-1}{a}x\right)dx$$

$\int_0^a 1+x\,dx=\left[x+\frac{1}{2}x^2\right]_0^a=a+\frac{1}{2}a^2$

$\int_0^a e^x\,dx=\left[e^x\right]_0^a=e^a-1$

$\int_0^a\left(1+\frac{e^a-1}{a}x\right)dx=\left[x+\frac{e^a-1}{2a}x^2\right]_0^a=\frac{a}{2}(e^a+1)$

よって，$a+\frac{1}{2}a^2<e^a-1<\frac{a}{2}(e^a+1)$

辺々 1 を加えて，$1+a+\frac{1}{2}a^2<e^a<1+\frac{a}{2}(e^a+1)$ を得る。

(3)　(2) の不等式において，$a=\frac{1}{2}$ とすると

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}<\sqrt{e}<1+\frac{1}{4}(\sqrt{e}+1)$ でこれを整理すると $\frac{13}{8}<\sqrt{e}<\frac{5}{3}$

ゆえに，$\frac{169}{64}<e<\frac{25}{9}$

$\frac{169}{64}=2.640625$，$\frac{25}{9}=2.77\cdots$ なので，$2.64<e<2.78$ が成立する。

【総括】

誘導部分の不等式証明 (1)，(2) は確実に確保したいレベルの問題です。

(3) は (2) の結果をどう活用するかですが，単純に $a=1$ を代入しておしまいというわけにはいかず，メンタルを崩された人も多いでしょう。

そこそこのレベルであれば，前問の誘導不等式を単純に使おうとしてもうまくいかないことが多く，”一手間” 必要になります。

失敗したときのリカバリーですが，「不等式の精度を高めるにはどうすればよいか」という意識で模索していくことになるでしょう。

© MathClinic