数値評価１

次の問いに答えよ。ただし，π は円周率を表す。

(1) $\displaystyle\int_0^1 x^4(1-x)^4\,dx$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,dx$ を求めよ。

(4) 不等式 $\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^1 x^4(1-x)^4\,dx \leqq \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,dx \leqq \int_0^1 x^4(1-x)^4\,dx$ が成り立つことを示し，それを用いて

$$3.14<\pi<3.15$$

を示せ。

＜ '19 埼玉大 ＞

【戦略】

(1)，(2)，(3) の定積分の計算は All or Nothing でしょう。

(1) はバラせばおしまいです。バラすにしても二項定理で手際よくバラしましょう。

(2) は「The tan」($x=\tan\theta$ $\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ の置換) です。

(3) は頭でっかち (仮分数) なので，帯分数に直すだけですが，少し計算量があります。
割り算ミスに気をつけましょう。

(4) は "中身比べ" で考えればよく，当然範囲は積分区間 $0\leqq x\leqq 1$ です。

最後のオチである π の評価ですが，ヒントである

$$\frac{1}{2}\int_0^1 x^4(1-x)^4\,dx \leqq \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,dx \leqq \int_0^1 x^4(1-x)^4\,dx$$

に対して，(1)，(3) の結果を代入して整理するだけで，特に一手間かかるわけでもなくすんなり示せます。

解答

(1) $(1-x)^4=x^4-4x^3+6x^2-4x+1$ なので，

$$x^4(1-x)^4=x^8-4x^7+6x^6-4x^5+x^4$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^4(1-x)^4\,dx&=\int_0^1 x^8-4x^7+6x^6-4x^5+x^4\ dx\\&=\left[\frac{1}{9}x^9-\frac{1}{2}x^8+\frac{6}{7}x^7-\frac{2}{3}x^6+\frac{1}{5}x^5\right]_0^1\\&=\frac{1}{630}\ \cdots\ 答\end{aligned}$$

(2) $x=\tan\theta$ $\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$

x	$0\ \to\ 1$
θ	$0\ \to\ \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\quad\left(\because\ 1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}\right)\\&=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}\\&=\frac{\pi}{4}\ \cdots\ 答\end{aligned}$$

(3) $\displaystyle\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}=x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4-\frac{4}{x^2+1}$

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,dx&=\int_0^1\left(x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4-\frac{4}{x^2+1}\right)dx\\&=\left[\frac{1}{7}x^7-\frac{2}{3}x^6+x^5-\frac{4}{3}x^3+4x\right]_0^1-4\cdot\frac{\pi}{4}\\&=\frac{22}{7}-\pi\ \cdots\ 答\end{aligned}$$

(4) 積分区間 $0\leqq x\leqq 1$ において

$$\begin{aligned}\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}-\frac{x^4(1-x)^4}{2}&=\frac{x^4(1-x)^4}{2}\left(\frac{2}{1+x^2}-1\right)\\&=\frac{x^4(1-x)^4}{2}\cdot\frac{(1+x)(1-x)}{1+x^2}\geqq 0\end{aligned}$$

一方

$$\begin{aligned}x^4(1-x)^4-\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}&=x^4(1-x)^4\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\\&=x^4(1-x)^4\cdot\frac{x^2}{1+x^2}\geqq 0\end{aligned}$$

これより，$0\leqq x\leqq 1$ の範囲において $\displaystyle\frac{x^4(1-x)^4}{2}\leqq\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\leqq x^4(1-x)^4$

したがって，$\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^1 x^4(1-x)^4\,dx\leqq\int_0^1\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,dx\leqq\int_0^1 x^4(1-x)^4\,dx$

(1)，(3) より $\displaystyle\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{630}<\frac{22}{7}-\pi<\frac{1}{630}$，すなわち

$$\frac{1979}{630}<\pi<\frac{3959}{1260}$$

これより，$3.141\cdots<\pi<3.142\cdots$ であり，$3.14<\pi<3.15$ であることが示された。

【総括】

ほぼ計算主体で，言われたとおり計算していけばよいだけでした。

途中どこかで躓いたとしたら，早急に足下を見直しましょう。

⑶ の帯分数に直す計算は手間かもしれませんが，下手にうまい方法を探るよりやった方が早いと思います。
特に試験場で策にこだわりすぎると，平常心を失いかねませんから。

⑷ もヒントがあり，しかもそのヒントもそのまま使うだけで，あっさりと終わってしまいました。

同じ π の評価でも 2013 年度の阪大 (理学部挑戦枠 ← 現在は廃止) でとてつもない計算を強いられる問題もあります。

> 円周率を π とする。正の整数 n に対し，
>
> $$a_n=\int_0^{2-\sqrt{3}}\frac{1-x^{4n}}{1+x^2}\,dx\ ,\quad b_n=\int_0^{2-\sqrt{3}}\frac{1+x^{4n+2}}{1+x^2}\,dx$$
>
> とおく。
>
> (1) $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{\pi}{12}$ を証明せよ。
>
> (2) $3.141<\pi<3.142$ を証明せよ。ただし，$1.7320508<\sqrt{3}<1.7320509$ である。

猛者はチャレンジしてみましょう。（私はもう二度とやりたくありません。）

※ この問題自体をディスってるのではなく，この問題自体は方針を考える題材としてはいい問題です。計算量がエグいだけです。