自然数の数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を

$a_1=5$, $b_1=2$, $a_{n+1}=a_n{}^2+b_n{}^2$, $b_{n+1}=2a_nb_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

で定める。

このとき，すべての自然数 n に対して，a_n と b_n の最大公約数は 1 であることを示せ。

< '12 和歌山県立医科大　改 >

【戦略】

もちろん数学的帰納法で証明することになります。

$n=k$ **のとき** a_k, b_k **の最大公約数が** 1 **であると仮定します。**

ここで，a_{k+1}, b_{k+1} **も最大公約数が** 1 **であることを示しにいくのですが，ここから闇雲にいくと道を踏み外しかねません。**

このシリーズを勉強している人は背理法を選択してくれるでしょう。

そこで，a_{k+1}, b_{k+1} **が公約数** $G\ (\geqq 2)$ **をもつと仮定します。**

すると，与えられた漸化式から $\begin{cases} a_k{}^2+b_k{}^2=G\alpha \\ 2a_kb_k=G\beta \end{cases}$ **などと表せます。**

見るからに辺々足したり引いたりしたい形をしているので，辺々足したり引いたりしてみると

$$\begin{cases} (a_k+b_k)^2=G(\alpha+\beta) \\ (a_k-b_k)^2=G(\alpha-\beta) \end{cases}$$

が得られます。

ここで「公約数 G **」として話を進めていくと**

公約数という設定が『弱い』

ということが分かると思います。

この公約数 G **という設定を「共通素因数** p **」という設定にすると**

$$\begin{cases} (a_k+b_k)^2=p(\alpha+\beta) \\ (a_k-b_k)^2=p(\alpha-\beta) \end{cases}$$

となり，a_k+b_k, a_k-b_k **も共通素因数** p **をもつことになります。**

すると，$\begin{cases} a_k+b_k=pK \\ a_k-b_k=pL \end{cases}$ **と表せ，**$\begin{cases} 2a_k=p(K+L) \\ 2b_k=p(K-L) \end{cases}$ **を得ます。**

ここで，p **が奇素数であれば，**a_k, b_k **がともに素因数** p **をもち，帰納法の仮定に矛盾するので解決するのですが，**$p=2$ **のときにこの議論が通用しません。**

とはいえ，$p=2$ **のときはよくよく観察してみるとありえません。**

与えられた漸化式を観察してみると，帰納的に a_n **はいつも奇数ですし，**b_n **はいつも偶数であることが容易に読み取れますから，共通素因数として** 2 **をもつことはありえないことが分かります。**

以上の内容を逆算して解答をまとめていけばよいことになります。

解答

まず，$n=1, 2, \cdots$ に対して

a_n は奇数，b_n は偶数 $\cdots(*)$

であることを数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1$ のとき　　条件より $(*)$ は正しい。

(ii)　$n=k$ ($k=1, 2, \cdots$) のとき a_k は奇数，b_k は偶数　と仮定する。

このとき，与えられた漸化式から $\begin{cases} a_{k+1}=a_k{}^2+b_k{}^2 \cdots ① \\ b_{k+1}=2a_kb_k \cdots ② \end{cases}$

① 及び仮定から，$a_{k+1}=$(奇数)$^2+$(偶数)$^2=$(奇数)

② より b_{k+1} は偶数

よって，$n=k+1$ のときも $(*)$ は正しい。

(i), (ii) より，$n=1, 2, \cdots$ に対して $(*)$ は正しい。

次に，$n=1, 2, \cdots$ に対して

a_n, b_n の最大公約数が 1 $\cdots(**)$

ということを数学的帰納法で証明する。

(Ⅰ)　$n=1$ のとき　条件 $a_1=5$, $b_1=2$ より $(**)$ は正しい。

(Ⅱ)　$n=k$ ($k=1, 2, \cdots$) のとき

a_k, b_k の最大公約数が 1

であると仮定する。

ここで，a_{k+1}, b_{k+1} が共通素因数 p をもつと仮定する。

$(*)$ より $p\neq 2$ で p は奇素数 $\cdots$③

このとき，$\begin{cases} a_{k+1}=p\alpha \\ b_{k+1}=p\beta \end{cases}$ (α, β は整数)

と表せ，与えられた漸化式から $\begin{cases} a_k{}^2+b_k{}^2=p\alpha \cdots ④ \\ 2a_kb_k=p\beta \cdots ⑤ \end{cases}$

④＋⑤ より $(a_k+b_k)^2=p(\alpha+\beta)$

③ より，a_k+b_k は素因数 p をもつ。

一方，④－⑤ より $(a_k-b_k)^2=p(\alpha-\beta)$

③ より，a_k-b_k は素因数 p をもつ。

これより，$\begin{cases} a_k+b_k=pK \cdots ⑥ \\ a_k-b_k=pL \cdots ⑦ \end{cases}$ (K, L は整数) と表せる。

⑥＋⑦ より $2a_k=p(K+L)$ で，③ より a_k は素因数 p をもつ。

⑥－⑦ より $2b_k=p(K-L)$ で，③ より b_k は素因数 p をもつ。

これらは a_k, b_k が 2 より大きい共通素因数 p をもつことを意味し，帰納法の仮定に矛盾する。

(Ⅰ), (Ⅱ) より，$n=1, 2, \cdots$ に対して $(**)$ が正しいことが示され，題意は示された。

【総括】

今回は最初から漸化式が設定されていました。

私が本問を見たときに最初に思った印象は

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n^{\ 2} + b_n^{\ 2} \\ b_{n+1} = 2a_n b_n \end{cases}$$

と並べてみたとき，「辺々足したいなぁ」とか「辺々引きたいなぁ」という気持ちでした。たぶんそれが後々どこかで効いてくるのだろうという心構えをもって臨みました。

【戦略】でも述べましたが，

a_{k+1}，b_{k+1} が公約数 $G(\geqq 2)$ をもつと仮定する

としたとき，「公約数」という設定が ”弱い ” ということに気が付かないと手が進みません。
（運よく？）最初から共通素因数 p としている人はある程度のところまでは手が進んだかもしれませんが。

また，p が奇素数であるということも見抜く必要があります。
そのために，与えられた漸化式を「偶奇」という観点で観察する力も問われます。

「帰納法と背理法１」，「帰納法と背理法２」で学習した流れやストーリーをベースとして，さらに観察力や洞察力，構想力を要する問題だと思います。