　O を原点とする xyz 空間内に，xy 平面上の放物線 $y=x^2$ を y 軸のまわりに回転してできる曲面 S と，正四面体 OABC があり，条件「3 頂点 A，B，C は S 上にある」をみたしている。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 正四面体 OABC の 1 辺の長さを求めよ。

(2) 正四面体 OABC が条件をみたしながら動くとき，xy 平面による正四面体 OABC の切り口の面積の最小値を求めよ。

＜ '20 東京慈恵会医科大 ＞

【戦略】

「曲面 S 上にある」という条件をどうやって立式するかが問題です。

回転曲面の方程式を立てるためには経験が必要です。

曲面 S の方程式が $y=x^2+z^2$ になるという部分までたどり着ければ，A，B，C の y 座標が同じだと分かります。

正三角形 ABC の一辺の長さは正弦定理で求まりますから，あとは OA＝AB とつなげば解決です。

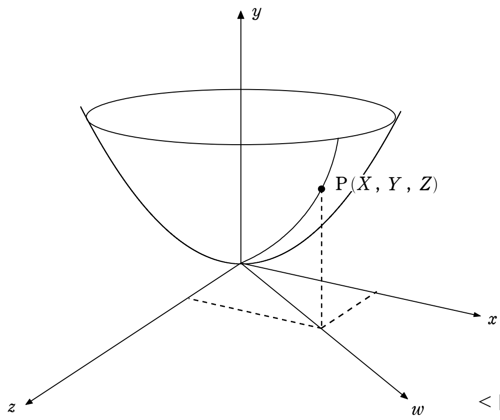
(2) はまずは $z=0$ による切り口が三角形だと見抜きましょう。

線分 AB の切り口を点 P，線分 AC の切り口を点 Q として，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=u\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=v\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおけば，△OPQ＝PQ となり，結局，線分 PQ の長さが最小となるときを考えることに帰着します。

三角形 ABC の重心 G に対して P，G，Q が同一直線上にあることを考えると $\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}=3$ という条件を Get します。

あとは，文字の範囲に気を付けて文字消去すれば 2 次関数の最小問題となります。

解答



＜図1＞

曲面 S 上の点 $\mathrm{P}(X, Y, Z)$ について，上の＜図1＞のように w 軸をとる。

$y=w^2$ を満たすので，$Y=\left(\sqrt{X^2+Z^2}\right)^2$，すなわち $Y=X^2+Z^2$

つまり，曲面 S の方程式は $y=x^2+z^2$

$\therefore$ $\mathrm{A}\,(a_1,\ a_1{}^2+a_2{}^2,\ a_2)$，$\mathrm{B}\,(b_1,\ b_1{}^2+b_2{}^2,\ b_2)$，$\mathrm{C}\,(c_1,\ c_1{}^2+c_2{}^2,\ c_2)$ とおける。

$\mathrm{OA}^2=a_1{}^2+a_2{}^2+(a_1{}^2+a_2{}^2)^2=(a_1{}^2+a_2{}^2)(1+a_1{}^2+a_2{}^2)$

同様にして

$\mathrm{OB}^2=(b_1{}^2+b_2{}^2)(1+b_1{}^2+b_2{}^2)$，$\mathrm{OC}^2=(c_1{}^2+c_2{}^2)(1+c_1{}^2+c_2{}^2)$

OA＝OB より $(a_1{}^2+a_2{}^2)(1+a_1{}^2+a_2{}^2)=(b_1{}^2+b_2{}^2)(1+b_1{}^2+b_2{}^2)$

$a_1{}^2+a_2{}^2=p$，$b_1{}^2+b_2{}^2=q$ とおくと，$p(1+p)=q(1+q)$

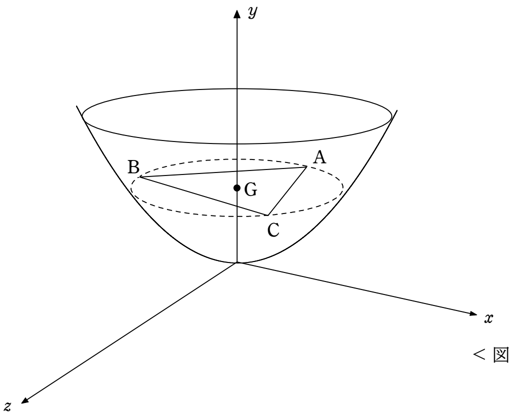
整理すると $(p-q)(1+p+q)=0$

$1+p+q=1+a_1{}^2+a_2{}^2+b_1{}^2+b_2{}^2\neq 0$ なので，$p=q$

すなわち $a_1{}^2+a_2{}^2=b_1{}^2+b_2{}^2$ を得る。

同様にして，$a_1{}^2+a_2{}^2=b_1{}^2+b_2{}^2=c_1{}^2+c_2{}^2$（$=k$ とおく…①）を得る。

これより，A，B，C の y 座標は同じである。



＜図2＞

よって，正三角形 ABC の重心 G は y 軸上にあり，G$(0,\ k,\ 0)$ とおける。

$\mathrm{GA}=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}=\sqrt{k}$ （∵①）

正三角形 ABC で正弦定理を用いると $\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin\dfrac{\pi}{3}}=2\sqrt{k}$

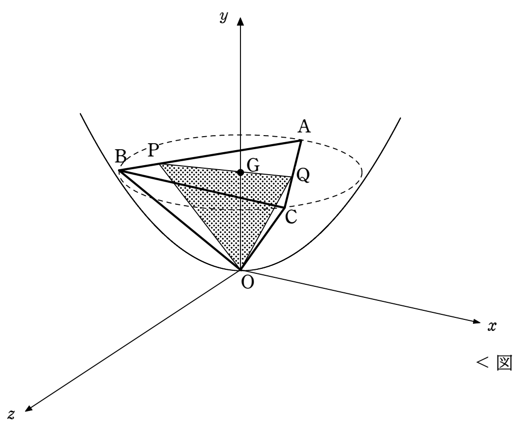
これより，$\mathrm{AB}=\sqrt{3k}$ を得る。

一方，$\mathrm{OA}^2=k(1+k)$ であり，$\mathrm{OA}^2=\mathrm{AB}^2$ より，$k(1+k)=3k$

$k>0$ なので，$1+k=3$ で，$k=2$

以上から求める正四面体 OABC の1辺の長さは $\sqrt{6}$ …答

(2)



＜図3＞

xy 平面 $(z=0)$ による切り口は＜図3＞の△OPQ

$$\triangle\mathrm{OPQ}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{OG}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{PQ}\cdot 2\ \text{（∵(1)の途中議論で，}k=2\text{）}$$
$$=\mathrm{PQ}$$

ゆえに，PQ が最小となるときを考えればよい。

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=u\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=v\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ （$0<u\leqq 1$，$0<v\leqq 1$）とおく。

$$\begin{cases} |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=u\sqrt{6} \\ |\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|=v\sqrt{6} \\ \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=u\sqrt{6}\cdot v\sqrt{6}\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}=3uv \end{cases}\quad\cdots②$$

今，$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$
$$=\frac{1}{3u}\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\frac{1}{3v}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$$

P，G，Q は同一直線上ゆえ $\dfrac{1}{3u}+\dfrac{1}{3v}=1$ より，$\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}=3$ …③ を得る。

ここで $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2$
$$=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2-2\,\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$$
$$=6u^2+6v^2-6uv\ \text{（∵②）}$$
$$=6\{(u+v)^2-3uv\}$$

$uv=t$ とおくと，③より，$u+v=3t$ となるので

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=6(9t^2-3t)$$
$$=6\left\{9\left(t-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}$$

ここで，$\dfrac{1}{u}\geqq 1$，$\dfrac{1}{v}\geqq 1$，③より

$\dfrac{1}{v}=3-\dfrac{1}{u}\geqq 1$ なので，$1\leqq\dfrac{1}{u}\leqq 2$ …④ を得る。

いま，$\dfrac{1}{t}=\dfrac{1}{uv}$
$$=\frac{1}{u}\left(3-\frac{1}{u}\right)$$

$U=\dfrac{1}{u}$ とおくと，$\dfrac{1}{t}=U(3-U)$
$$=-\left(U-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\ \text{（}=f(U)\text{ とおく）}$$

④より，$1\leqq U\leqq 2$ なので，この範囲で，$f(1)\leqq f(U)\leqq f\left(\dfrac{3}{2}\right)$

すなわち $2\leqq\dfrac{1}{t}\leqq\dfrac{9}{4}$ を得る。

これより $\dfrac{4}{9}\leqq t\leqq\dfrac{1}{2}$ であり，この範囲で $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=6\left\{9\left(t-\dfrac{1}{6}\right)^2-\dfrac{1}{4}\right\}$ は

$t=\dfrac{4}{9}$ のとき最小となり，その最小値は $\dfrac{8}{3}$

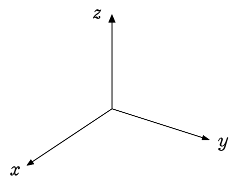
よって，線分 PQ の長さの最小値は $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

以上から，求める面積の最小値は $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ …答

【総括】

回転曲面の方程式の立式は何度も自分で立式することで，その要領を染み込ませましょう。

また，



という向きで図をかくと，非常に書きづらいと思います。

臨機応変に書きやすい方向から図をかくということも教訓にしてください。