円錐の回転体

点 O を原点とする座標空間内で，一辺の長さが 1 の正三角形 OPQ を動かす。また，点 A $(1,\ 0,\ 0)$ に対して，$\angle\mathrm{AOP}=\theta$ とおく。ただし $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。

(1) 点 Q が $(0,\ 0,\ 1)$ にあるとき，点 P の x 座標がとり得る値の範囲と，θ がとり得る値の範囲を 求めよ。

(2) 点 Q が平面 $x=0$ 上を動くとき，辺 OP が通過しうる範囲を K とする。K の体積を求めよ。

＜ ’17 東京大 ＞

【戦略 I 】

(1) は点 P が円運動をすることは明らかです。

直感的に点 P の x 座標がとり得る値の範囲が $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ というのも目に見えていますし，$\angle\mathrm{AOP}(=\theta)$ が とり得る値の範囲も $30^\circ \leqq \theta \leqq 150^\circ$ であることは明らかなのですが，わざわざ設問になっている以上は ”明らか” という一言で済ますのは好ましくありません。
(解答 では P が円運動することは自明であるものとして書いてしまいました。点 P が円運動をすることをきちんと論じる解答については 別解 を参照してください。)

これらの値のとり得る範囲を式的に処理しようとするとなると，空間図形であることを鑑みてもベクトル，とりわけ角度の方は，内積からの cos 経由で処理するのが普通でしょうか。

(1) で点 Q を固定したときの線分 OP の通過領域が円錐の側面であることは見抜くことができるでしょう。(2) ではその固定を外して Q を $x=0$ で $\mathrm{OQ}=1$ を満たすように動かすので，結局題意の立体 K というのは (1) で求めた円錐の側面の x 軸回転体であることが分かります。

円錐の回転体というのは回転体の中でも工夫の余地があるテーマであり，その工夫とは

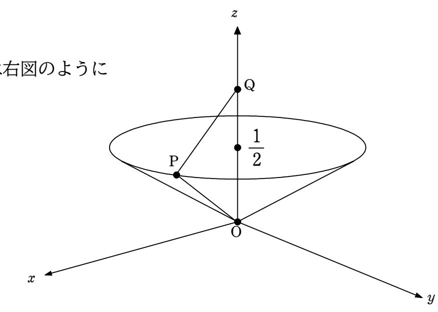
母線を集めてから回す

という工夫です。

この工夫を行わずに真正面からぶつかると，切り口に双曲線が現れますので，心理的には少し大変です。そちらは 別解 を参照して下さい。

解答

(1) Q が固定されているとき P は右図のように



$$\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{3}{4} \\ z=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

という円を表す。

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $(0^\circ \leqq \alpha < 360^\circ)$ と表せる。

ゆえに，P の x 座標 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha$ ($0^\circ \leqq \alpha < 360^\circ$) のとり得る範囲は

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq x \leqq \frac{\sqrt{3}}{2} \cdots 答$$

このとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=1$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha$ なので

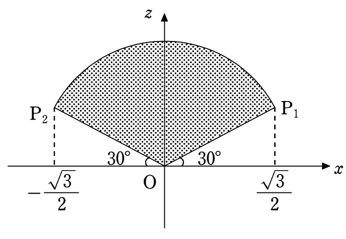
$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\,|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha}{1\cdot 1}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha$$

$0^\circ \leqq \alpha < 360^\circ$ では，$-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq \cos\theta \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であり，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ においてこれを解くと

$$30^\circ \leqq \theta \leqq 150^\circ \cdots 答$$

(2) (1) の円錐の側面 (母線 OP の集合) の x 軸回転体が K である。

母線 OP 1 本 1 本を回転させて，全ての母線を xz 平面に乗せると



($\mathrm{P}_1\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0,\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\mathrm{P}_2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ としている。)

この扇形 $\mathrm{OP_1P_2}$ の x 軸回転体が K であり，その体積を V とする。

対称性から，$x \geqq 0$ の部分の回転体を考えることにする。

$x=k$ $\left(0 \leqq k \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ でこの回転体を切ったときを考えると

$$\begin{aligned} \frac{V}{2} &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \pi(1-k^2)\,dk - \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \pi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}k\right)^2 dk \\ &= \pi\left[k-\frac{1}{3}k^3\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{\pi}{3}\left[\frac{1}{3}k^3\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}\pi \end{aligned}$$

よって，$V=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi \cdots 答$

【戦略２】

⑴ の点 P が円運動を表すことをきちんと論じてみたいと思います。

点 $\mathrm{P}(X,Y,Z)$ としたときに，点 P を束縛する条件である「△OPQ が正三角形」ということを翻訳して，X,Y,Z が満たすべき関係を Get しにいきます。

正三角形の翻訳には色々ありますが，$\mathrm{OP}=\mathrm{OQ}=\mathrm{PQ}=1$（3 辺が等しい）で処理しても
$\mathrm{OP}=\mathrm{OQ}=1$，$\angle\mathrm{POQ}=60^\circ$（2 辺挟角）で処理しても構いません。
（ここでは PQ を計算したくないので，後者の方針で考えてみます。）

⑴ 別解 ＜Pの軌跡を出す部分まで＞

$\mathrm{P}(X,Y,Z)$ とすると，$\mathrm{OP}=\mathrm{OQ}=1$ なので，$X^2+Y^2+Z^2=1$ …①

$\angle\mathrm{POQ}=60^\circ$ なので，$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\,|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}=\cos 60^\circ$， すなわち $\dfrac{X\cdot 0+Y\cdot 0+Z\cdot 1}{1\cdot 1}=\dfrac{1}{2}$

これより，$Z=\dfrac{1}{2}$ を得て，① に代入すると，$X^2+Y^2=\dfrac{3}{4}$

以上から，点 $\mathrm{P}(X,Y,Z)$ の軌跡は 平面 $z=\dfrac{1}{2}$ 上の円 $x^2+y^2=\dfrac{3}{4}$ を表す。

【戦略３】

⑵ の円錐の回転体を考えるにあたり，解答 の方針は経験がないと思いつきにくい上に，「円錐の回転体」という今回のテーマでしか通用しない態度です。

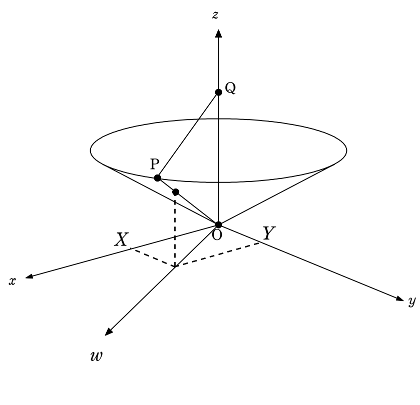
一般的には回転軸に対して垂直に切って，その断面積を考え，それを積分するというのが王道ですので，それで処理をしてみます。

「切ってから回す」というのが回転体の鉄則ですから，まずは切りますが，そのためにはまず回転前の円錐面の方程式を出す必要があります。

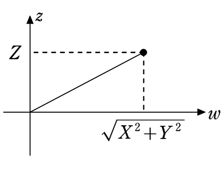
回転曲面の方程式については「回す前と，回した後が同じに見える」ことを利用して立式します。

⑵ 別解

図のように w 軸を設定する。



この円錐上の点 (X,Y,Z) は

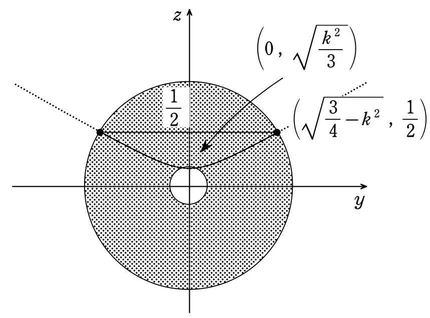


という状態であり，

$z=\dfrac{1}{\sqrt{3}}w$ を満たしているので，$Z=\sqrt{\dfrac{X^2+Y^2}{3}}$ を満たす。

ゆえに，この円錐面の方程式は $x^2+y^2=3z^2$ で与えられる。

これを $x=k\ \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq k\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ で切ったとき，その切り口は $y^2-3z^2=-k^2$ で与えられる。



これを x 軸の回りに 1 回転させたときの回転体の面積が題意の立体 K を $x=k$ で切ったときの断面積になる。対称性から $0\leqq k\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ で考えてもよい。

このとき，断面積 $S(k)$ は

$S(k)=\pi\left\{\sqrt{\left(\dfrac{3}{4}-k^2\right)+\dfrac{1}{4}}\right\}^2-\pi\left\{\sqrt{\dfrac{k^2}{3}}\right\}^2=\pi(1-k^2)-\dfrac{\pi k^2}{3}=\pi-\dfrac{4}{3}\pi k^2$

で与えられるので，求める体積を V とすると

$$
\begin{aligned}
\frac{V}{2}&=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}S(k)\,dk\\
&=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\pi-\frac{4}{3}\pi k^2\right)dk\\
&=\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(1-\frac{4}{3}k^2\right)dk\\
&=\pi\left[k-\frac{4}{9}k^3\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\\
&=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi
\end{aligned}
$$

よって，$V=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ …答

【総括】

⑴ は確実に得点したい問題です。こういった問題ほど丁寧に論述し，取りこぼしのないように（差をつけられないように）したいところです。

⑵ はまずは立体 K が x 軸回転体であることを見抜く必要があります。
一見回転体には見えないが，実は回転体であるということを見抜かなければならないので通常の回転体の問題に比べて敷居が高く感じたかもしれません。

円錐の回転体を真正面からぶつかると一般的には大変です。

２次曲線が別名 " 円錐曲線 " と呼ばれていることからお分かりいただけるように，円錐を切ったときの切り口は 「 放物線 or 楕円 or 双曲線 」となり，特に本問のような切り口が双曲線となると，心理的負担も大きくなります。

「円錐の回転体」というのは

母線を集めてから回転

という態度を取ることで，著しく労力が軽減されるので，通常の回転体とは別に頭の中に整理しておくとよいでしょう。（もちろん円錐の頂点が回転軸上にある場合に限りますが）

推測の域を出ませんが，出題者はこの「母線を集めてから回転」という路線を期待してわざわざ ⑴ という設問を用意したのではないか思います。