円 $x^2+y^2=1$ の上に点 A を，また円 $x^2+y^2=3$ 上に 2 点 B, C をとる。このとき，三角形 ABC の面積の最大値を求めよ。

＜ '72 名古屋大 ＞

【戦略】

3 点が独立に動くときの面積の最大値を求める問題なので，最終的には予選決勝法で仕留めることになるのは予想がつきます。

まず絶対にやりたくない方針は

$\mathrm{A}(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，$\mathrm{B}(\sqrt{3}\cos\beta,\ \sqrt{3}\sin\beta)$，$\mathrm{C}(\sqrt{3}\cos\gamma,\ \sqrt{3}\sin\gamma)$

とおく方針です。

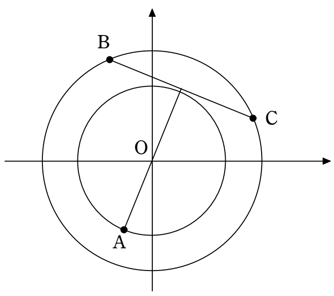
ここから △ABC の面積を立式すること自体が一苦労ですし，その後の予選決勝法も大変な労力になることは目に見えています。

面積を立式してから予選決勝法を考えると上のように失敗します。

そこで，図形のままの段階で予選決勝法を考えます。

まずは 3 点のうち，2 点を固定します。もちろん，この固定する 2 点は B, C の方がいいでしょう。

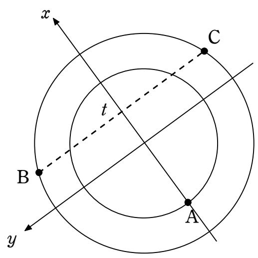
A だけが動くとしたら，右の図のように A から線分 BC に下ろした垂線が原点を通るように A をとることが最善だと分かります。



つまり，予選決勝法における予選通過者は AB=AC の二等辺三角形だとわかります。

ここまでくると，もはやこの x 軸，y 軸が邪魔です。

要するに B, C がどこにあっても右のように座標を取り直して考えればよいということが分かれば，面積の式はかなり簡単に表せることになります。



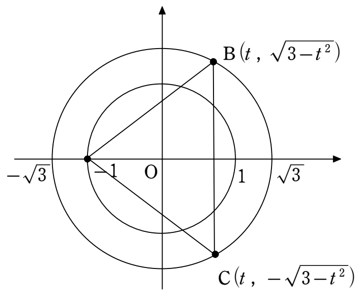
解答

半径 1 の円と，半径 $\sqrt{3}$ の同心円について考えればよく，座標系としては線分 BC の垂直二等分線を x 軸としても一般性は失われない。

$\mathrm{B}(t,\ \sqrt{3-t^2})$, $\mathrm{C}(t,\ -\sqrt{3-t^2})$ $(0 \leqq t < \sqrt{3})$ とする。

まず，t を固定する。

底辺を BC と見れば，A が $(-1,\ 0)$ となるとき，高さは最大となり，△ABC の面積は最大となる。



このとき，$\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3-t^2}\cdot(1+t)$

$= (t+1)\sqrt{3-t^2}$

$f(t) = (t+1)\sqrt{3-t^2}$ $(0 \leqq t < \sqrt{3})$ として，$f(t)$ の最大値を求めればよい。

$f(t) = \sqrt{(t+1)^2(3-t^2)}$ なので，$g(t) = (t+1)^2(3-t^2)$ $(0 \leqq t < \sqrt{3})$ とおいて，$g(t)$ の最大値を調べる。

$$
\begin{aligned}
g'(t) &= 2(t+1)(3-t^2) + (t+1)^2(-2t) \\
&= 2(t+1)\{(3-t^2) - t(t+1)\} \\
&= 2(t+1)(-2t^2 - t + 3) \\
&= -2(t+1)(2t+3)(t-1)
\end{aligned}
$$

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$(\sqrt{3})$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	3	↗	8	↘	(0)

よって，増減表より，$t=1$ のとき $g(t)$ は最大値 8 をとる。

ゆえに，$f(t)$ の最大値は $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

以上から求める最大値は $2\sqrt{2}$ …答

【総括】

この問題の意地悪なところは最初に $x^2+y^2=1$，$x^2+y^2=3$ と言っている部分です。

問題文が

半径 1，$\sqrt{3}$ の同心円をそれぞれ C_1，C_2 とし，C_1 上を 1 点が，C_2 上を 2 点が動く。このとき，この 3 点によってできる三角形の面積の最大値を求めよ。

であれば，恐らく正答率は上がると思われます。
これだと，自分が考えやすいように座標をとるのが自然だからです。

最初に座標軸を設定されると，自分の都合のいいように座標系を取り直すなんていう作業をする気にならない人が大多数でしょう。

【戦略】で述べたように 2 点 B，C を止めて A を動かすという実験から

A から線分 BC に下ろした垂線が円の中心を通るように A をとることが最善である

という「座標に関係ない事実」を見いだすことができたかどうかが明暗を分けたでしょう。

恐らくですが，多くの人が
$\mathrm{A}(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，$\mathrm{B}(\sqrt{3}\cos\beta,\ \sqrt{3}\sin\beta)$，$\mathrm{C}(\sqrt{3}\cos\gamma,\ \sqrt{3}\sin\gamma)$
とおいて計算が爆発してしまったことでしょう。

もちろんこの方針でできないとまでは言いませんが，それに時間をかけて完答できる可能性と，時間を失うリスクを天秤にかければあまりにも釣り合っていません。

本問は試験場では難問ですが，本問から学べることがあります。
本問は
円上の 2 点を固定するときは，座標系を取り直せばよい
ということを教えてくれました。
これはどこかで役に立つことが出てくるかもしれませんので，トップ校志望者はぜひインストールしてください。（以下に参考問題を挙げておきます）

類題
xy 平面上において 円 $C : x^2+y^2=1$ とする。円 C 上を 3 点 P，Q，R が自由に動くとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ の最小値を求めよ。

＜ '73 立教大 ＞

答 $-\dfrac{1}{2}$