a，b，c，d を正の数とし，n を自然数とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $a=3$，$b=4$，$c=5$，$d=6$ のとき，$a^n+b^n+c^n$ と d^n の大小関係を調べよ。

(2) $a^3+b^3+c^3=d^3$ のとき，$a^n+b^n+c^n$ と d^n の大小関係を調べよ。

＜ '99 和歌山大 ＞

【戦略】

パッと見，(1) と (2) は無関係ではなさそうです。$a=3$，$b=4$，$c=5$，$d=6$ というのは $a^3+b^3+c^3=d^3$ という関係式を満たしていることから，(1) は (2) における具体例であることが分かります。まずは (1) で要領を掴んで下さいということなのでしょう。

ひとまず実験してみますと，$n=1$，2 のときは $3^n+4^n+5^n>6^n$ であることが確かめられます。

$n=3$ のときは $3^3+4^3+5^3=6^3$ が成り立ち，$n=4$ では $3^n+4^n+5^n<6^n$ となります。

n が増えるにつれて，6^n の値が $3^n+4^n+5^n$ よりも大きくなっていることを見抜き，これ以降は $3^n+4^n+5^n<6^n$ ではないか？と推測できると思います。

あとはこの予想を裏付ける方向に向かいます。手法としてはやはり数学的帰納法でしょう。

(2) も (1) の結果をもとに結論は推測できます。

まずは対称性の活用ということで，$0<a\leqq b\leqq c$ と設定しておきましょう。

(1) を例にとれば $a=3$，$b=4$，$c=5$ としても，$a=3$，$b=5$，$c=4$ としても，$a=4$，$b=3$，$c=5$ としても同じ結果になることは明らかです。

$0<a\leqq b\leqq c$ と設定すると，$c<d$ が Get できるので，$0<a\leqq b\leqq c<d$ という大小関係を得ます。

まずは $a+b+c-d>0$ を証明したいのですが，このままでは埒があきません。

そこで，$d(a+b+c-d)>0$ を証明することにします。(ここが発想力が必要な部分です)

そうすると，$d(a+b+c-d)>a^2+b^2+c^2-d^2$ という関係式が Get できますから，$n=2$ のときを証明できれば $n=1$ も証明できることになります。

$a^2+b^2+c^2-d^2>0$ もこのまま見てても手が進みませんから，$d(a^2+b^2+c^2-d^2)>0$ を目指すことにすれば，先ほど同様に $d(a^2+b^2+c^2-d^2)>a^3+b^3+c^3-d^3$ という関係式を Get できるので，これで解決しそうです。

$n\geqq 4$ では (1) の手法がそのまま使えそうです。

解答

$n=1$ のとき，$3^1+4^1+5^1=12>6^1$

$n=2$ のとき，$3^2+4^2+5^2=50>6^2$

$n=3$ のとき，$3^3+4^3+5^3=216=6^3$

$n=4$ のとき，$3^4+4^4+5^4=962<6^4$

$n\geqq 4$ のとき，$3^n+4^n+5^n<6^n$ …(*) と推測できるので，これを数学的帰納法で示す。

(i) $n=4$ のとき 上記より (*) は成立する。

(ii) $n=k$ ($k=4$，5，…) のとき $3^k+4^k+5^k<6^k$ が成立すると仮定する。

このとき，
$$\begin{aligned}3^{k+1}+4^{k+1}+5^{k+1}&=3\cdot 3^k+4\cdot 4^k+5\cdot 5^k\\&<6\cdot 3^k+6\cdot 4^k+6\cdot 5^k\\&=6(3^k+4^k+5^k)\\&<6\cdot 6^k\ (\because \text{帰納法の仮定})\end{aligned}$$

よって，$3^{k+1}+4^{k+1}+5^{k+1}<6^{k+1}$ が成り立ち，(*) は $n=k+1$ のときも成立する。

(i), (ii) から，$n\geqq 4$ のとき $3^n+4^n+5^n<6^n$ が成立する。

求める結論は
$$\begin{cases}a^n+b^n+c^n>d^n\ (n=1,\ 2\ \text{のとき})\\a^n+b^n+c^n=d^n\ (n=3\ \text{のとき})\\a^n+b^n+c^n<d^n\ (n\geqq 4\ \text{のとき})\end{cases}$$
…答

(2) $0<a\leqq b\leqq c$ として考えても一般性を失わない。

$c^3<a^3+b^3+c^3$ なので，条件から $c^3<d^3$，すなわち $c<d$ ($\because c$，d は正)

よって，$0<a\leqq b\leqq c<d$ …(☆) となる。

ここで，
$$\begin{aligned}d(a^2+b^2+c^2-d^2)&=a^2d+b^2d+c^2d-d^3\\&>a^2a+b^2b+c^2c-d^3\ (\because (☆))\\&=a^3+b^3+c^3-d^3\\&=0\ (\because \text{条件})\end{aligned}$$

よって，$d(a^2+b^2+c^2-d^2)>0$ で，$d>0$ より $a^2+b^2+c^2-d^2>0$

これより，$a^2+b^2+c^2>d^2$ …①

また，
$$\begin{aligned}d(a+b+c-d)&=ad+bd+cd-d^2\\&>aa+bb+cc-d^2\\&=a^2+b^2+c^2-d^2\\&>0\ (\because ①)\end{aligned}$$

$d>0$ より，$a+b+c-d>0$ で $a+b+c>d$ …②

$n=4$ のとき
$$\begin{aligned}a^4+b^4+c^4&=a\cdot a^3+b\cdot b^3+c\cdot c^3\\&<d\cdot a^3+d\cdot b^3+d\cdot c^3\\&=d(a^3+b^3+c^3)\\&=d\cdot d^3\ (\because \text{条件})\\&=d^4\end{aligned}$$

これより，$n\geqq 4$ で $a^n+b^n+c^n<d^n$ …(*)$'$ と推測できるので，これを数学的帰納法で示す。

(Ⅰ) $n=4$ のとき上記より (*)$'$ は成立する。

(Ⅱ) $n=k$ ($k=4$，5，…) のとき $a^k+b^k+c^k<d^k$ が成り立つと仮定する。

このとき，
$$\begin{aligned}a^{k+1}+b^{k+1}+c^{k+1}&=a\cdot a^k+b\cdot b^k+c\cdot c^k\\&<d\cdot a^k+d\cdot b^k+d\cdot c^k\ (\because (☆))\\&=d(a^k+b^k+c^k)\\&<d\cdot d^k\ (\because \text{帰納法の仮定})\end{aligned}$$

よって，$a^{k+1}+b^{k+1}+c^{k+1}<d^{k+1}$ が成り立ち，(*)$'$ は $n=k+1$ のときも成立する。

(Ⅰ), (Ⅱ) から，$n\geqq 4$ のとき $a^n+b^n+c^n<d^n$ …③ が成立する。

①, ②, ③ から求める結論は
$$\begin{cases}a^n+b^n+c^n>d^n\ (n=1,\ 2\ \text{のとき})\\a^n+b^n+c^n=d^n\ (n=3\ \text{のとき})\\a^n+b^n+c^n<d^n\ (n\geqq 4\ \text{のとき})\end{cases}$$
…答

【戦略２】

⑵ は $a^3+b^3+c^3=d^3$ が同次式という部分に着目して両辺 d^3 で割ると，文字の個数が減らせます。

$\dfrac{a}{d}=A$，$\dfrac{b}{d}=B$，$\dfrac{c}{d}=C$ **などとおくと，与えられた条件は** $A^3+B^3+C^3=1$

ということになります。

$a^n+b^n+c^n \gtreqless d^n$ **というのは，** $A^n+B^n+C^n \gtreqless 1$ **と同じ事になり，随分見通しがよくなりました。**

$0<A<1$，$0<B<1$，$0<C<1$ **であることから，** A，B，C **は**

”かければかけるだけ小さくなる”

ことになり，容易に証明できます。

⑵ 別解 ～ $0<a\leqq b\leqq c<d$ を導いた後 ～

$a^3+b^3+c^3=d^3$ の両辺を d^3（>0）で割ると，$\left(\dfrac{a}{d}\right)^3+\left(\dfrac{b}{d}\right)^3+\left(\dfrac{c}{d}\right)^3=1$

$\dfrac{a}{d}=A$，$\dfrac{b}{d}=B$，$\dfrac{c}{d}=C$（$0<A\leqq B\leqq C<1$ …①）とおくと，

$$A^3+B^3+C^3=1 \cdots ②$$

$n=1$ のとき，① より，$A+B+C>A^3+B^3+C^3$

② より，$A+B+C>1$，すなわち $\dfrac{a}{d}+\dfrac{b}{d}+\dfrac{c}{d}>1$

これより，$a+b+c>d$ を得る。

$n=2$ のとき ① より $A^2+B^2+C^2>A^3+B^3+C^3$

② より $A^2+B^2+C^2>1$，すなわち $\left(\dfrac{a}{d}\right)^2+\left(\dfrac{b}{d}\right)^2+\left(\dfrac{c}{d}\right)^2>1$

これより，$a^2+b^2+c^2>d^2$ を得る。

$n\geqq 4$ のとき，① より $A^n+B^n+C^n<A^3+B^3+C^3$

② より $A^n+B^n+C^n<1$，すなわち $\left(\dfrac{a}{d}\right)^n+\left(\dfrac{b}{d}\right)^n+\left(\dfrac{c}{d}\right)^n<1$

これより，$a^n+b^n+c^n<d^n$ を得る。

以上から，$\begin{cases} a^n+b^n+c^n>d^n\ (n=1,\ 2\ のとき) \\ a^n+b^n+c^n=d^n\ (n=3\ のとき) \\ a^n+b^n+c^n<d^n\ (n\geqq 4\ のとき) \end{cases}$ …答

【総括】

⑴ は何とか確保したいところです。予想して帰納法という路線をそのまま実行して，特に躓きそうな部分はないからです。（躓くとしたら帰納法の中で評価する部分かな？）

逆に ⑵ は手をこまねいた人も少なくないかもしれません。
一見すると ⑴ と同様に示せそうですが，$n=1$ のときでさえ中々勝手が違うということで焦りも出てきたことかと思います。

$n=3$ を中心に，$\begin{cases} n=2 \to n=1 \text{ と下っていく方向で証明する} \\ n=4 \to n=5 \to \cdots \text{ と登っていく方向で証明する} \end{cases}$ ということを思いつく必要があり，決して簡単ではない問題です。

また，同次式を手がかりに与えられた条件の両辺を d^3 で割ってやると，変数の個数を減らせ，随分見通しもよくなります。