鋭角三角形 ABCの ∠A，∠B，∠C の大きさをそれぞれ α，β，γ で表す。点 D，E，F はそれぞれ辺 CA，AB，BC 上にあり，DE⊥AB，EF⊥BC，FD⊥CA を満たす。

(1) △ABC と △DEF は相似であることを示せ。

(2) $\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{EF}}=\dfrac{1}{\tan\alpha}+\dfrac{1}{\tan\beta}+\dfrac{1}{\tan\gamma}$ を示せ。

(3) α が一定のとき，$\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{EF}}$ を最小にするような β，γ を αで表せ。

< '12 横浜国立大 >

【戦略】

(1) **辺の情報については何もないので，角度が全て等しいことを目指すのが自然でしょう。状況を図に書いていくと，手なりに示したいことが言えてきますので，それを丁寧に記述します。**

(2) **まず，直角三角形 BFE について着目し，$\mathrm{BF}=\dfrac{1}{\tan\beta}\mathrm{EF}$**

であることに注目したいところです。
（示すべき形の一部が現れています。）

そこで，BC を考えるにあたり，差額分の CF の長さを処理していきます。CF=○ EF の形にもっていきたいという欲が湧いてくれば，しめたものです。

将来的には，$\mathrm{BC}=\mathrm{BF}+\mathrm{CF}=\left(\dfrac{1}{\tan\beta}+\bigcirc\right)\mathrm{EF}$ と，まとめるのが目論見です。

そんな中，直角三角形 CDF に注目すれば，$\mathrm{CF}=\dfrac{1}{\sin\gamma}\mathrm{FD}$ を得ます。

(1) で △DEF の内角も α，β，γ であることを見出してますから FD の長さと EF の長さの関係は正弦定理から Get できます。

あとは先ほどの目論見通り，手を進めていくのみです。

(3) **(2) で $\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{EF}}$ を数式的に表現できていることから，もう幾何の要素はなく，”2 変数関数の最小問題” ということになります。**

β，γ は $\beta+\gamma=$(定数) という関係をもつ従属２変数です。

従属２変数関数の最大最小問題においては文字消去を狙っていくのが最有力の方針ですから，ここでは γ を消去する方針で処理します。

その際の注意点として，γ は消去されてしまいますが，$0<\gamma<\dfrac{\pi}{2}$ という条件を，残る文字である β に引き継がないといけません。

つまり，$\gamma=\pi-(\alpha+\beta)$ と消去するとき，$0<\gamma<\dfrac{\pi}{2}$ にも代入し $0<\pi-(\alpha+\beta)<\dfrac{\pi}{2}$ を整理した，$\dfrac{\pi}{2}-\alpha<\beta<\pi-\alpha$ と，元々の条件である $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ を両方考慮して β の範囲を出す必要があるわけです。

そこに注意しながら，$\dfrac{1}{\tan\beta}+\dfrac{1}{\tan\gamma}$ を計算していくと

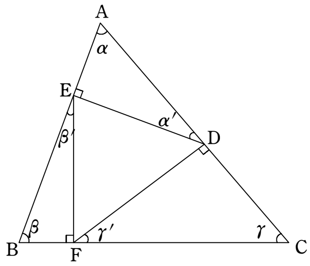
$\dfrac{1}{\tan\beta}+\dfrac{1}{\tan\gamma}=\cdots\cdots=\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}$ までは辿り着けるはずです。

ここから手が止まるかもしれませんが，分母は実質 β の 1 変数関数です。（γ は β で表せている）
分母が最大となるときを考えるわけですが，β が２カ所の sin の中で動いているのが嫌ですね。

２カ所で動く変数を１カ所に集める方法として積和公式があります。これは三角関数を扱う常套手段の１つです。

解答

(1) （図 1）のように
角 α'，β'，γ' を定める。



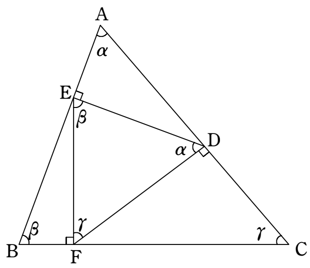
（図 1）

$$\begin{cases}\alpha+\alpha'=\dfrac{\pi}{2}\\ \beta+\beta'=\dfrac{\pi}{2}\\ \gamma+\gamma'=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

$$\angle\mathrm{EDF}=\pi-\left(\frac{\pi}{2}+\alpha'\right)=\alpha$$
$$\angle\mathrm{DEF}=\pi-\left(\frac{\pi}{2}+\beta'\right)=\beta$$
$$\angle\mathrm{DFE}=\pi-\left(\frac{\pi}{2}+\gamma'\right)=\gamma$$

よって，△ABC と △DEF は内角がすべて等しく，△ABC と △DEF は相似である。

(2) $\dfrac{\mathrm{BF}}{\mathrm{EF}}=\tan\beta$，$\dfrac{\mathrm{FD}}{\mathrm{CF}}=\sin\gamma$



（図 2）

これより，

$\mathrm{BF}=\dfrac{1}{\tan\beta}\mathrm{EF}$ … ①

$\mathrm{CF}=\dfrac{1}{\sin\gamma}\mathrm{FD}$ … ②

△DEF で正弦定理を用いると

$\dfrac{\mathrm{FD}}{\sin\beta}=\dfrac{\mathrm{EF}}{\sin\alpha}$，すなわち，$\mathrm{FD}=\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}\mathrm{EF}$ が成り立つ。

これを ② に代入し，$\mathrm{CF}=\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha\sin\gamma}\mathrm{EF}$ … ③ を得る。

①＋③ より，$\mathrm{BF}+\mathrm{CF}=\left(\dfrac{1}{\tan\beta}+\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha\sin\gamma}\right)\mathrm{EF}$

よって，$\mathrm{BC}=\left(\dfrac{1}{\tan\beta}+\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha\sin\gamma}\right)\mathrm{EF}$

ここで

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tan\beta}+\frac{\sin\beta}{\sin\alpha\sin\gamma}&=\frac{1}{\tan\beta}+\frac{\sin\{\pi-(\alpha+\gamma)\}}{\sin\alpha\sin\gamma}\\&=\frac{1}{\tan\beta}+\frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\alpha\sin\gamma}\quad(\because\ \sin(\pi-\theta)=\sin\theta\ )\\&=\frac{1}{\tan\beta}+\frac{\sin\alpha\cos\gamma+\cos\alpha\sin\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma}\\&=\frac{1}{\tan\beta}+\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\\&=\frac{1}{\tan\alpha}+\frac{1}{\tan\beta}+\frac{1}{\tan\gamma}\end{aligned}$$

ゆえに，$\mathrm{BC}=\left(\dfrac{1}{\tan\alpha}+\dfrac{1}{\tan\beta}+\dfrac{1}{\tan\gamma}\right)\mathrm{EF}$

すなわち，$\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{EF}}=\dfrac{1}{\tan\alpha}+\dfrac{1}{\tan\beta}+\dfrac{1}{\tan\gamma}$ であることが示された。

(3) $\begin{cases} \beta+\gamma=\pi-\alpha \cdots ④ \\ 0<\beta<\dfrac{\pi}{2} \cdots ⑤ \\ 0<\gamma<\dfrac{\pi}{2} \cdots ⑥ \end{cases}$ として，β，γ が動く中で，

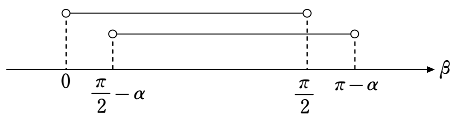
$\dfrac{1}{\tan\beta}+\dfrac{1}{\tan\gamma}$ が最小となるときを考えればよい。

γ を消去することを考える。

④ より，$\gamma=\pi-(\alpha+\beta)$ であり，⑥ を考えると

$0<\pi-(\alpha+\beta)<\dfrac{\pi}{2}$ であり，これを整理すると $\dfrac{\pi}{2}-\alpha<\beta<\pi-\alpha \cdots ⑦$

一方，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ であることに注意して，⑤，⑦ をともに満たす β の範囲を考えると，



$$\frac{\pi}{2}-\alpha<\beta<\frac{\pi}{2} \cdots (*)$$

さて

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\tan\beta}+\frac{1}{\tan\gamma}&=\frac{\cos\beta}{\sin\beta}+\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}\\
&=\frac{\sin\gamma\cos\beta+\cos\gamma\sin\beta}{\sin\beta\sin\gamma}\\
&=\frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}\\
&=\frac{\sin(\pi-\alpha)}{\sin\beta\sin\gamma}\ (\because ④)\\
&=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}\\
&=\frac{\sin\alpha}{\frac{1}{2}\{\cos(\beta-\gamma)-\cos(\beta+\gamma)\}}\quad (\because \text{積和公式})\\
&=\frac{2\sin\alpha}{\cos\{\beta-(\pi-\alpha-\beta)\}-\cos(\pi-\alpha)}\\
&=\frac{2\sin\alpha}{\cos\{2\beta-(\pi-\alpha)\}+\cos\alpha}
\end{aligned}$$

ここで，(*)，及び $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ より，$2\beta-(\pi-\alpha)=0$ ということは実現可能である。

そして，このとき，$\dfrac{1}{\tan\beta}+\dfrac{1}{\tan\gamma}$ は最小となる。

$\beta=\dfrac{\pi-\alpha}{2}$ であるとき，$\gamma=\pi-\alpha-\beta$
$$=\pi-\alpha-\frac{\pi-\alpha}{2}$$
$$=\frac{\pi-\alpha}{2}$$

以上から，$\dfrac{1}{\tan\beta}+\dfrac{1}{\tan\gamma}$ を最小とする β，γ の値は

$$\beta=\frac{\pi-\alpha}{2},\ \gamma=\frac{\pi-\alpha}{2} \cdots \text{答}$$

【総括】

(2) は下手なことを考えると泥沼に嵌まりかねません。

(1) で相似であることを証明させ，(2) で聞かれているのは「相似比」ですから，妙に勘繰りたくなります。

$\dfrac{1}{\tan}$ というのがどこの比を表しているのか？というように，

式の持つ形と図形をリンクさせながら考える力

が求められていたと思います。

加えて，【戦略】で述べたような目論見を立てる構想力も必要で，まさに

「聞けば簡単だが，解けるかは別問題」

というタイプの問題ではないでしょうか。

(3) については実質のテーマは従属２変数の最小問題です。

今回は文字消去を狙える形なので，

消える文字の範囲を，生き残る文字に反映させる

ということに注意しながら文字消去していきましょう。

三角関数において，積和公式というものが

変数を１カ所に集める方法として常套手段である

ということはぜひ経験値としてください。

完答するためには，この分野の基礎力に加え，状況分析力，構想力，経験など総合的な力が必要だと思います。