(1)　等式　$(x^2-ny^2)(z^2-nt^2)=(xz+nyt)^2-n(xt+yz)^2$　を示せ。

(2)　$x^2-2y^2=-1$ の自然数解 $(x,\ y)$ が無限組であることを示し，$x>100$ となる解を１組求めよ。

＜ ’98 お茶の水女子大 ＞

**【戦略】**

(1)　**あまり凝ったことを考える必要はなく，素直に左辺，右辺をそれぞれ計算して，それらが一致することを確認すればよいでしょう。**

(2)　**(1) の等式をどう活用するかです。**

**$x^2-2y^2=-1$ という方程式の左辺 $x^2-2y^2$ が登場するように (1) の左辺に注目し，$n=2$ とします。**

**すると，$(x^2-2y^2)(z^2-2t^2)=(xz+2yt)^2-2(xt+yz)^2$　という式が得られます。**

**さらに，$z^2-2t^2=1$　となるように $z=3$，$t=2$　としましょう。**

$x^2-2y^2=(3x+4y)^2-2(2x+3y)^2$　**という式が得られます。**

**ここから何を見出すかですが**　　**ここが ○$^2-2$△$^2$ という形をしている**

**ということに気が付きたいところです。**

**これは $x$，$y$　という値に対して，$X=3x+4y$，$Y=2x+3y$　と定めると　$X^2-2Y^2=x^2-2y^2$　となることを意味します。**

**つまり，○$^2-2$△$^2$　という構造を保ちながら，新たな値を次々と作っていけることを意味しています。**

**これを数式的に表現するピッタリの武器が「漸化式」です。**
**前の情報から次の情報を同じ規則によって作り出していくという過程は，まさに漸化式の出番でしょう。**

$$\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=1 \\ x_{n+1}=3x_n+4y_n \\ y_{n+1}=2x_n+3y_n \end{cases}$$
**という漸化式を定めると**

$$\begin{aligned} {x_{n+1}}^2-2{y_{n+1}}^2 &= (3x_n+4y_n)^2-2(2x_n+3y_n)^2 \\ &= {x_n}^2-2{y_n}^2 \end{aligned}$$

**という恒等数列の構造をもった形が現れますから**

$$\begin{aligned} {x_n}^2-2{y_n}^2 &= {x_1}^2-2{y_1}^2 \\ &= -1 \end{aligned}$$

**を得ます。**

**これは，$(x,\ y)=(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，$(x_3,\ y_3)$，…… が $x^2-2y^2=-1$ の解であることを意味しますので，無数に多くの自然数解を得ることができることになります。**

**$x>100$ を満たす解については，上の漸化式を使って，小さいほうから調べていった方が早いでしょう。**

解答

(1)　(左辺)$=x^2z^2-nx^2t^2-ny^2z^2+n^2y^2t^2$

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= x^2z^2+2nxyzt+n^2y^2t^2-nx^2t^2-2nxyzt-ny^2z^2 \\ &= x^2z^2-nx^2t^2-ny^2z^2+n^2y^2t^2 \end{aligned}$$

よって，$(x^2-ny^2)(z^2-nt^2)=(xz+nyt)^2-n(xt+yz)^2$　が成立する。

(2)　(1) の等式で，$n=2$，$z=3$，$t=2$　とすると

$$x^2-2y^2=(3x+4y)^2-2(2x+3y)^2 \ \cdots(*)$$

そこで，

$$\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=1 \\ x_{n+1}=3x_n+4y_n \\ y_{n+1}=2x_n+3y_n \end{cases} \quad \cdots\cdots(**)$$

という漸化式で定まる自然数の数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ を定めると

$$\begin{aligned} {x_{n+1}}^2-2{y_{n+1}}^2 &= (3x_n+4y_n)^2-2(2x_n+3y_n)^2 \\ &= {x_n}^2-2{y_n}^2 \quad (\because (*)) \end{aligned}$$

これより，
$$\begin{aligned} {x_n}^2-2{y_n}^2 &= {x_1}^2-2{y_1}^2 \\ &= 1-2 \\ &= -1 \end{aligned}$$

つまり，$x^2-2y^2=-1$ の解として
$$(x,\ y)=(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2),\ (x_3,\ y_3),\ \cdots\cdots$$
と無限に多く自然数解が存在する。

また，$(**)$ によって順次 $(x_n,\ y_n)$ を求めていくと
$$(x_2,\ y_2)=(7,\ 5)$$
$$(x_3,\ y_3)=(41,\ 29)$$
$$(x_4,\ y_4)=(239,\ 169)$$

よって，$x^2-2y^2=-1$ の解のうち，$x>100$ を満たすものの１つは

$$(x,\ y)=(239,\ 169) \ \cdots \text{答}$$

【総括】

ペル方程式を不思議な恒等式から解いてみるという面白いアプローチの問題です。

この不思議な恒等式は「ブラーマグプタの恒等式」と呼ばれる有名な（マニアックな）恒等式で，$x^2-Dy^2=\pm1$ というペル方程式の解を求める際に応用されることもあります。
（以下は $x^2-Dy^2=1$ という形についての考察です。）

まずは特殊整数解 $(x_1,\ y_1)$ が見つかったとします。

ブラーマグプタの恒等式

$$(x^2-ny^2)(z^2-nt^2)=(xz+nyt)^2-n(xt+yz)^2$$

において，

$n=D$，$z=x_1$，$t=y_1$ とすると

$$(x^2-Dy^2)({x_1}^2-D{y_1}^2)=(x_1x+Dy_1y)^2-D(y_1x+x_1y)^2$$

${x_1}^2-D{y_1}^2=1$ を満たすことから

$$x^2-Dy^2=(x_1x+Dy_1y)^2-D(y_1x+x_1y)^2$$

という関係式を得ます。

これより，$\begin{cases} x_{n+1}=x_1x_n+Dy_1y_n \\ y_{n+1}=x_1y_n+y_1x_n \end{cases}$ と定めると

$$\begin{aligned} {x_{n+1}}^2-D{y_{n+1}}^2&=(x_1x_n+Dy_1y_n)^2-D(x_1y_n+y_1x_n)^2 \\ &={x_n}^2-D{y_n}^2 \end{aligned}$$

となり，${x_n}^2-D{y_n}^2={x_1}^2-D{y_1}^2$
$=1$（$\because$ $x^2-Dy^2=1$ の特殊解が $(x_1,\ y_1)$ ）

ですから，$\begin{cases} x_{n+1}=x_1x_n+Dy_1y_n \\ y_{n+1}=x_1y_n+y_1x_n \end{cases}$ という漸化式で定まる数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ によってできる組

$$(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2),\ \cdots\cdots$$

がペル方程式 $x^2-Dy^2=1$ の整数解ということになります。

また，$x^2-Dy^2=1$ の特殊整数解が $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ のように，もし2組見つかれば，ブラーマグプタの恒等式から

$$\begin{aligned} (x_1x_2+Dy_1y_2)^2-D(x_1y_2+y_1x_2)^2&=({x_1}^2-D{y_1}^2)({x_2}^2-D{y_2}^2) \\ &=1\cdot1 \\ &=1 \end{aligned}$$

となり，新たな解 $(x_1x_2+Dy_1y_2,\ x_1y_2+y_1x_2)$ を見つけることもできますね。