ペル方程式２

自然数 $n=1, 2, 3, \cdots$ に対して，$(2-\sqrt{3})^n$ という形の数を考える。これらの数はいずれも，それぞれ適当な自然数 m が存在して $\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$ という表示をもつことを示せ。

＜ '94 東京工業大 ＞

【戦略】

$(2-\sqrt{3})^1=\sqrt{4}-\sqrt{3}$

$(2-\sqrt{3})^2=7-4\sqrt{3}=\sqrt{49}-\sqrt{48}$

$(2-\sqrt{3})^3=26-15\sqrt{3}=\sqrt{676}-\sqrt{675}$

と確かに $\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$ の形で表現されています。

これを単純に数学的帰納法で証明しようとすると

(i)　$n=1$ のとき　　明らかに題意成立

(ii)　$n=k$ $(k=1, 2, \cdots)$ のとき

$(2-\sqrt{3})^k=\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$ と仮定する。

$$\begin{aligned}(2-\sqrt{3})^{k+1}&=(2-\sqrt{3})^k(2-\sqrt{3})\\&=(\sqrt{m}-\sqrt{m-1})(2-\sqrt{3})\\&=2\sqrt{m}-2\sqrt{m-1}-\sqrt{3m}+\sqrt{3(m-1)}\end{aligned}$$

となり，ここから手が進みません。

もう少し実験の内容を観察してみると

$(2-\sqrt{3})^1=\sqrt{4}-\sqrt{3}$　　　$\sqrt{7^2}$

$(2-\sqrt{3})^2=7-4\sqrt{3}=\sqrt{49}-\sqrt{48}$　　　$\sqrt{26^2}$

$(2-\sqrt{3})^3=26-15\sqrt{3}=\sqrt{676}-\sqrt{675}$

と，ここでいう m とは平方数であることが分かります。

もちろん $\sqrt{3}$ の係数部分についても無理やり $\sqrt{}$ の中に入れるということを考えると

$(2-\sqrt{3})^n=a_n-b_n\sqrt{3}=\sqrt{a_n{}^2}-\sqrt{3b_n{}^2}$ **という構造をしていることが分かります。**

もちろんこの差が 1 であることを証明するということは

$$a_n{}^2-3b_n{}^2=1$$

であることを証明するということになります。

解答

$(2-\sqrt{3})^n=a_n-b_n\sqrt{3}$ （a_n, b_n は自然数）と表せる …(∗)

ということを数学的帰納法で示す。

(i)　$n=1$ のとき

$(2-\sqrt{3})^1=2-1\sqrt{3}$ なので，$a_1=2, b_1=1$ と定めれば，(∗) は正しい。

(ii)　$n=k$（$k=1, 2, 3, \cdots$）のとき

$(2-\sqrt{3})^k=a_k-b_k\sqrt{3}$（$a_k, b_k$ は自然数）と表せると仮定する。

このとき，
$$\begin{aligned}(2-\sqrt{3})^{k+1}&=(2-\sqrt{3})^k(2-\sqrt{3})\\&=(a_k-b_k\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\\&=(2a_k+3b_k)-(a_k+2b_k)\sqrt{3}\end{aligned}$$

ゆえに，$\begin{cases}a_{k+1}=2a_k+3b_k\\ b_{k+1}=a_k+2b_k\end{cases}$ と定めると，帰納法の仮定より，

a_{k+1}, b_{k+1} は自然数となり，

$$(2-\sqrt{3})^{k+1}=a_{k+1}-b_{k+1}\sqrt{3}\ (a_{k+1},\ b_{k+1}\ は自然数)$$

と表せるため，$n=k+1$ のときも (∗) は正しい。

(i)，(ii) より，$n=1, 2, \cdots$ に対して

$(2-\sqrt{3})^n=a_n-b_n\sqrt{3}$ （a_n, b_n は自然数）と表せる

これより，$(2-\sqrt{3})^n=\sqrt{a_n{}^2}-\sqrt{3b_n{}^2}$ と表せることから，題意を示すためには

$$a_n{}^2-3b_n{}^2=1 \ \cdots(∗∗)$$

であることを証明すればよい。

(Ⅰ)　$n=1$ のとき

$a_1=2, b_1=1$ より，$a_1{}^2-3b_1{}^2=2^2-3\cdot1^2=1$ で (∗∗) は成立する。

(Ⅱ)　$n=k$（$k=1, 2, \cdots$）のとき

$$a_k{}^2-3b_k{}^2=1$$

が成立すると仮定する。

この数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は 上記 (ii) の議論より $\begin{cases}a_{k+1}=2a_k+3b_k\\ b_{k+1}=a_k+2b_k\end{cases}$ を満たしているので

$$\begin{aligned}a_{k+1}{}^2-3b_{k+1}{}^2&=(2a_k+3b_k)^2-3(a_k+2b_k)^2\\&=4a_k{}^2+12a_kb_k+9b_k{}^2-3(a_k{}^2+4a_kb_k+4b_k{}^2)\\&=a_k{}^2-3b_k{}^2\\&=1\ (\because\ 帰納法の仮定)\end{aligned}$$

となり，$n=k+1$ のときも (∗∗) は成立する。

(Ⅰ)，(Ⅱ) より，$n=1, 2, \cdots$ に対して

$(2-\sqrt{3})^n=a_n-b_n\sqrt{3}\ (=\sqrt{a_n{}^2}-\sqrt{3b_n{}^2})$（$a_n, b_n$ は自然数）

と表したときの a_n, b_n に対して $a_n{}^2-3b_n{}^2=1$ が成立することが示された。

ゆえに，題意も示された。

【戦略２】

n 乗展開と言えば二項定理もインスピレーションされて然るべき方針です。

$(2-\sqrt{3})^n={}_n\mathrm{C}_0 2^n+{}_n\mathrm{C}_1 2^{n-1}(-\sqrt{3})^1+{}_n\mathrm{C}_2+2^{n-2}(-\sqrt{3})^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n(-\sqrt{3})^n$
$(2+\sqrt{3})^n={}_n\mathrm{C}_0 2^n+{}_n\mathrm{C}_1 2^{n-1}(\sqrt{3})^1+{}_n\mathrm{C}_2+2^{n-2}(\sqrt{3})^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n(\sqrt{3})^n$

であることから，$(2-\sqrt{3})^n$ と $(2+\sqrt{3})^n$ を二項展開したときの違いは，$\sqrt{3}$ が残る項（ $\sqrt{3}$ の奇数次 ）の符号だけです。

したがって，$(2-\sqrt{3})^n=a_n-b_n\sqrt{3}$ と表したとき，同じ a_n，b_n を用いて $(2+\sqrt{3})^n=a_n+b_n\sqrt{3}$ と表すことができます。

これらの辺々をかけると，

$$\{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\}^n=(a_n+b_n\sqrt{3})(a_n-b_n\sqrt{3})$$

すなわち，$(a_n+b_n\sqrt{3})(a_n-b_n\sqrt{3})=1$ となります。

これより，$a_n{}^2-3b_n{}^2=1$ を得ることになり，解決します。

別解

二項定理より

$(2-\sqrt{3})^n={}_n\mathrm{C}_0 2^n+{}_n\mathrm{C}_1 2^{n-1}(-\sqrt{3})^1+{}_n\mathrm{C}_2+2^{n-2}(-\sqrt{3})^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n(-\sqrt{3})^n$
$(2+\sqrt{3})^n={}_n\mathrm{C}_0 2^n+{}_n\mathrm{C}_1 2^{n-1}(\sqrt{3})^1+{}_n\mathrm{C}_2+2^{n-2}(\sqrt{3})^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n(\sqrt{3})^n$

これより，

$$(2-\sqrt{3})^n=a_n-b_n\sqrt{3}\ \cdots ①\ (\ a_n,\ b_n：自然数\ )$$

と表したとき，

$$(2+\sqrt{3})^n=a_n+b_n\sqrt{3}\ \cdots ②$$

と表せる。

①×② より，$\{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\}^n=(a_n+b_n\sqrt{3})(a_n-b_n\sqrt{3})$

これより，$a_n{}^2-3b_n{}^2=1\ \cdots$ (☆) となる。

$$\begin{aligned}(2-\sqrt{3})^n&=a_n-b_n\sqrt{3}\\&=\sqrt{a_n{}^2}-\sqrt{3b_n{}^2}\end{aligned}$$

よって，$m=a_n{}^2$ とおくと，(☆) より，$3b_n{}^2=m-1$

ゆえに，$(2-\sqrt{3})^n=\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$（ m は自然数 ）という形で表せる。

【総括】

前回の「ペル方程式１」の内容を学習した人からすれば，本問は

$(2-\sqrt{3})^n=a_n-b_n\sqrt{3}$ と n 乗展開したときの a_n，b_n が，ペル方程式 $x^2-3y^2=1$ の解になっている

という前回学んだ内容を彷彿とさせるでしょう。

本問はペル方程式ということを前面に押し出していない聞き方ですし，背景的なものを知らなくても，それが出来不出来に直結はしません。

【戦略】，及び 解答 もそういった予備知識なしという前提で書きました。

その意味では本問は ” 受験的には ”「実験→予想→帰納法」という項目に入れるべき問題かもしれません。

別解 では共役な無理数（← この表現が正式なものかは不明 ）に注目した解答です。

$x^2-3y^2=1$ というペル方程式を無理やりにでも因数分解すると

$(x+y\sqrt{3})(x-y\sqrt{3})=1$ です。

今回背景になっているペル方程式は特殊解として $x=2$，$y=1$ がありますから

$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$ となり，これらを辺々 n 乗すると

$$(2+\sqrt{3})^n(2-\sqrt{3})^n=1$$

であるということになります。

つまり，$(2\pm\sqrt{3})^n=a_n\pm b_n\sqrt{3}$（ 複号同順 ）と表したとき，$a_n{}^2-3b_n{}^2=1$ ということになるわけです。

ちなみに，本問と全く同じ問題が 2013 年度の静岡大学でも出題されています。

> n を自然数とするとき，$(2-\sqrt{3})^n$ は $\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$（ m は自然数 ）の形で表されることを示せ。
> ＜ ’13 静岡大 ＞

また，本問の 別解 と前回の「ペル方程式１」でやった三重大学の問題を足して２で割ったような問題が 1984 年度の山口大にありました。

> $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ は
> $$x_n+y_n\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})^n\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$
> を満たす整数の数列とする。
> (1) a，b，c，d を整数とする。$a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2}$ ならば $a=c$ かつ $b=d$ であることを証明せよ。
> (2) 全ての n について，$x_n-y_n\sqrt{2}=(3-2\sqrt{2})^n$ が成り立つことを証明せよ。
> (3) 全ての n について，$x_n{}^2-2y_n{}^2=1$ が成り立つことを証明せよ。
> ＜ ’84 山口大 ＞