次の問いに答えよ。

(1) p，q，r，s を整数とする。このとき，$p+q\sqrt{2}=r+s\sqrt{2}$ が成り立つならば $p=r$，$q=s$ となることを示せ。ここで，$\sqrt{2}$ が無理数であることは使ってよい。

(2) 自然数 n に対し，$(3+2\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$ を満たす整数 a_n，b_n が存在することを数学的帰納法により示せ。

(3) a_n，b_n を (2) のものとする。このとき，すべての自然数 n について $(x,\ y)=(a_n,\ b_n)$ は方程式 $x^2-2y^2=1$ の解であることを数学的帰納法により示せ。

＜ '10 三重大 ＞

【戦略】

(1) **無理数の係数比較に関する基本的な論証で，教科書レベルです。**

基本方針としては背理法で，(無理数)=(有理数) の形で矛盾させます。

(2) **「数学的帰納法により示せ」という方針まで指示してあるので，方針で困ることはないはずです。**
(3) でも用いる連立漸化式さえ Get できれば手なりに進んでいくでしょう。

(3) $(3+2\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$ **と表したときの数列** $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ **は**

$$a_1=3,\ b_1=2,\ \begin{cases} a_{n+1}=3a_n+4b_n \\ b_{n+1}=2a_n+3b_n \end{cases}$$

という連立漸化式で与えられます。

$(x,\ y)=(a_n,\ b_n)$ **が方程式** $x^2-2y^2=1$ **の解であることを示すということは**

$$a_n{}^2-2b_n{}^2=1$$

が成り立つことを示すということに他なりません。
もちろん方針は数学的帰納法の一手です。

解答

(1) $p+q\sqrt{2}=r+s\sqrt{2}$ より，$(p-r)+(q-s)\sqrt{2}=0\cdots$ ①

$q\neq s$ と仮定すると，$\sqrt{2}=\dfrac{r-p}{q-s}$

p，q，r，s は整数なので，左辺は無理数，右辺は有理数となり矛盾する。

よって，$q=s$ で，このとき ① より $p-r=0$，すなわち $p=r$

以上から，$p=r$，$q=s$ が成立する。

(2) $(3+2\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$ （a_n，b_n：整数）と表せる …(*)

ということを n についての数学的帰納法で証明する。

(i) $n=1$ のとき $(3+2\sqrt{2})^1=3+2\sqrt{2}$

$a_1=3$，$b_1=2$ とすれば，$(3+2\sqrt{2})^1=a_1+b_1\sqrt{2}$ と表せる。

よって，$n=1$ のとき (*) は正しい。

(ii) $n=k$（$k=1,\ 2,\ \cdots$）のとき

$(3+2\sqrt{2})^k=a_k+b_k\sqrt{2}$ （a_k，b_k：整数）と仮定する。

$$\begin{aligned}(3+2\sqrt{2})^{k+1}&=(3+2\sqrt{2})^k(3+2\sqrt{2})\\&=(a_k+b_k\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})\\&=3a_k+2a_k\sqrt{2}+3b_k\sqrt{2}+4b_k\\&=(3a_k+4b_k)+(2a_k+3b_k)\sqrt{2}\end{aligned}$$

よって，$\begin{cases} a_{k+1}=3a_k+4b_k \\ b_{k+1}=2a_k+3b_k \end{cases}$ とおくと，a_{k+1}，b_{k+1} は整数で

$(3+2\sqrt{2})^{k+1}=a_{k+1}+b_{k+1}\sqrt{2}$ と表せ，$n=k+1$ のときも (*) は正しい。

(i)，(ii) より，$n=1,\ 2,\ \cdots$ に対して

$(3+2\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$ （a_n，b_n：整数）と表せる

ということが示された。

(3)
$$\begin{aligned}(3+2\sqrt{2})^{n+1}&=(3+2\sqrt{2})^n(3+2\sqrt{2})\\&=(a_n+b_n\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})\\&=3a_n+2a_n\sqrt{2}+3b_n\sqrt{2}+4b_n\\&=(3a_n+4b_n)+(2a_n+3b_n)\sqrt{2}\end{aligned}$$

一方，$(3+2\sqrt{2})^{n+1}=a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{2}$ と表される。

したがって，$a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{2}=(3a_n+4b_n)+(2a_n+3b_n)\sqrt{2}$

a_{n+1}，b_{n+1}，$3a_n+4b_n$，$2a_n+3b_n$ は整数であるので，(1) から

$$\begin{cases} a_{n+1}=3a_n+4b_n \\ b_{n+1}=2a_n+3b_n \end{cases}$$

が成立する。

よって，(2) によって定まる数列 $\{a_n\}$ ，$\{b_n\}$ は

$$a_1=3\,,\ b_1=2\,,\ \begin{cases} a_{n+1}=3a_n+4b_n \\ b_{n+1}=2a_n+3b_n \end{cases}$$

を満たしている。

$n=1\,,\,2\,,\,\cdots$ に対し，$(x\,,\,y)=(a_n\,,\,b_n)$ が $x^2-2y^2=1$ の解であること，すなわち

$$a_n{}^2-2b_n{}^2=1\cdots(**)$$

であることを n に関する数学的帰納法で証明する。

(Ⅰ)　$n=1$ のとき　$a_1{}^2-2b_1{}^2=3^2-2\cdot 2^2=1$ となり，(**) は成立する。

(Ⅱ)　$n=k$（$k=1\,,\,2\,,\,\cdots$）のとき $a_k{}^2-2b_k{}^2=1$ であると仮定する。

$$\begin{aligned} a_{k+1}{}^2-2b_{k+1}{}^2&=(3a_k+4b_k)^2-2(2a_k+3b_k)^2 \\ &=9a_k{}^2+24a_kb_k+16b_k{}^2-8a_k{}^2-24a_kb_k-18b_k{}^2 \\ &=a_k{}^2-2b_k{}^2 \\ &=1\ (\because\ \text{帰納法の仮定}) \end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも (**) は成立する。

(Ⅰ)，(Ⅱ) より $n=1\,,\,2\,,\,\cdots$ に対し，$(x\,,\,y)=(a_n\,,\,b_n)$ が $x^2-2y^2=1$ の解であることが示された。

【総括】

本問は表向きは数学的帰納法についての標準練習問題と言っていいでしょう。

ただ，背景には「ペル方程式」と呼ばれている $x^2-Dy^2=\pm1$ という形の有名方程式がテーマとなっています。

今回は

$(3+2\sqrt{2})^n$ という n 乗展開 → $x^2-2y^2=1$ の整数解

という流れでしたが，

$x^2-2y^2=1$ の整数解を求めたい → $(3+2\sqrt{2})^n$ の展開を利用

というのが本来の流れです。どこからこれ　がでてきたのか

を考えるにあたり，ペル方程式 $x^2-Dy^2=1$ (D は平方数でない自然数) を解く方法を見ていきます。

研究

$x^2-Dy^2=1$ （D は平方数でない自然数）

この方程式の整数解を導く方法としては

①：特殊整数解 $(x_1\,,\,y_1)$ を見つける。

②：$(x_1+y_1\sqrt{D})^n=x_n+y_n\sqrt{D}$ という数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ を設定する。

この数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ の一般項の組 $(x_n\,,\,y_n)$ が $x^2-Dy^2=1$ の整数解となっている。

証明　数学的帰納法で示す。

(i)　$n=1$ のとき

x_1，y_1 は $x^2-Dy^2=1$ の特殊解より，$x_1{}^2-Dy_1{}^2=1$ は成立する。

(ii)　$n=k$（$k=1\,,\,2\,,\,\cdots$）のとき

$(x\,,\,y)=(x_k\,,\,y_k)$ が $x^2-Dy^2=1$ の整数解であると仮定する。

$$\begin{aligned} (x_1+y_1\sqrt{D})^{k+1}&=(x_1+y_1\sqrt{D})(x_1+y_1\sqrt{D})^k \\ &=(x_1+y_1\sqrt{D})(x_k+y_k\sqrt{D}) \\ &=(x_1x_k+Dy_1y_k)+(x_1y_k+y_1x_k)\sqrt{D} \end{aligned}$$

$\sqrt{D}$ は無理数ゆえ，$\begin{cases} x_{k+1}=x_1x_k+Dy_1y_k \\ y_{k+1}=x_1y_k+y_1x_k \end{cases}$ が成立し x_{k+1}，y_{k+1} は整数である。

さらに

$$\begin{aligned} x_{k+1}{}^2-Dy_{k+1}{}^2&=(x_1x_k+Dy_1y_k)^2-D(x_1y_k+y_1x_k)^2 \\ &=x_1{}^2x_k{}^2+2Dx_1y_1x_ky_k+D^2y_1{}^2y_k{}^2 \\ &\quad -Dx_1{}^2y_k{}^2-2Dx_1y_1x_ky_k-Dy_1{}^2x_k{}^2 \\ &=x_1{}^2(x_k{}^2-Dy_k{}^2)-Dy_1{}^2(x_k{}^2-Dy_k{}^2) \\ &=(x_k{}^2-Dy_k{}^2)(x_1{}^2-Dy_1{}^2) \\ &=1\cdot1\ (\because\ \text{帰納法の仮定，及び(i)}) \\ &=1 \end{aligned}$$

となり，$n=k+1$ のときも成立する。

(i)，(ii) より $n=1\,,\,2\,,\,\cdots$ に対して

$(x_n\,,\,y_n)$ が $x^2-Dy^2=1$ の整数解となっている。

三重大の問題では，$x^2-2y^2=1$ の特殊解として $x=3$，$y=2$ があるので $(3+2\sqrt{2})^n$ の展開を考えようということでした。

もちろんペル方程式の世界は奥が深く，これで分かったような気になっていてはいけません。
例えば，上記のような方法で方程式の解を無数に見つけることはできるが，果たして「それが全てなのか？（その他に解はないのか？）」といった疑問なども出てくるでしょう。（ ’00 岡山大，’01 滋賀医科大にその証明が出題されていました。）

ただ本問は数学的帰納法の練習問題として終わらせるには惜しい題材だったので少しばかり踏み込んでみました。

このペル方程式を背景とした入試問題はチラホラ見受けられますので，シリーズものとしてこの後も続編を出したいと思います。