平面上の $\triangle$OAB を考え，辺 AB の中点を M とする。

$$\vec{a}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}\ ,\ \vec{b}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}$$

とおき，点 P を $\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}>0$ となるようにとる。直線 OP に A から下ろした垂線と直線 OP の交点を Q とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$ と $\vec{b}$ は平行であることを示せ。

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{MQ}}|=\dfrac{1}{2}\left(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\right)$ であることを示せ。

＜ '09 大阪大 ＞

【戦略】

内積は，$\bigcirc\cdot\square=0$ の形にすれば，「垂直」という意味付けができ，図形的にどのようなシチュエーションか分かりやすくなります。

そこで，与えられた条件 $\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0$ と移項してみます。

これにより，点 P の集合は $\vec{a}+\vec{b}$ を法線ベクトルにもつ直線だと分かります。(この直線を ℓ と呼びます。)

今回扱う $\vec{a}$，$\vec{b}$ は単位ベクトル (大きさが 1 のベクトル) ですから，

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$$

ということが言えます。

このことから，ℓ の方向ベクトルとして，$\vec{a}-\vec{b}$ が挙げられます。

これにより，k，t を実数として

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\\&=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\vec{a}+k(\vec{a}+\vec{b})\\&=\{k+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\}\vec{a}+k\vec{b}\end{aligned}\qquad\qquad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=t(\vec{a}-\vec{b})$$

と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ が 2 通りで表せましたから，$\vec{a}$，$\vec{b}$ が 1 次独立であることを用いて係数比較すれば，あとは手なりに進んでいきます。

(2) はここまで議論ができていれば，特に躓くことなく手が動いていくでしょう。(1) ができた人へのプレゼント問題です。

解答

(1)　与えられた条件 $\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ より

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0$ であるから

これを満たす点 P の集合は
図 1 の直線 ℓ である。

これは直線 OP が ℓ であることを意味する。

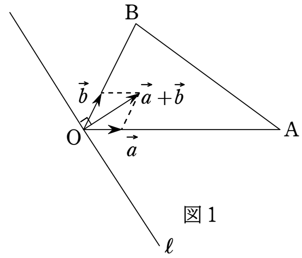


図 1

さて，$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$
$\qquad=0$ ($\because |\vec{a}|=|\vec{b}|=1$)

より，$\vec{a}-\vec{b}$ が表す点は ℓ 上にある。
(図 2 参照)

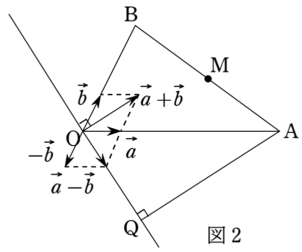


図 2

M は線分 AB の中点なので，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$$=\frac{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}{2}\vec{a}+\frac{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}{2}\vec{b}$$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\parallel\vec{a}+\vec{b}$ なので，k を実数として $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=k(\vec{a}+\vec{b})$ と表せる。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\\&=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\vec{a}+k(\vec{a}+\vec{b})\\&=\{k+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\}\vec{a}+k\vec{b}\end{aligned}$$

一方で，t を実数として，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=t(\vec{a}-\vec{b})$ と表せる。

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は 1 次独立であるので $\begin{cases}k+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=t\\k=-t\end{cases}$

この 2 式から t を消去すると，$k+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=-k$，すなわち $k=-\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}{2}$ を得る。

ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}{2}\vec{a}-\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}{2}\vec{b}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{MQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}\\&=\left(\frac{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}{2}\vec{a}-\frac{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}{2}\vec{b}\right)-\left(\frac{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}{2}\vec{a}+\frac{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}{2}\vec{b}\right)\\&=-\frac{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}{2}\vec{b}\end{aligned}$$

ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{MQ}}\parallel\vec{b}$ であることが示された。

(2)　$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{MQ}}|&=\left|-\frac{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}{2}\vec{b}\right|\\&=\left|\frac{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}{2}\right|\quad(\because |\vec{b}|=1)\\&=\frac{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}{2}\end{aligned}$$

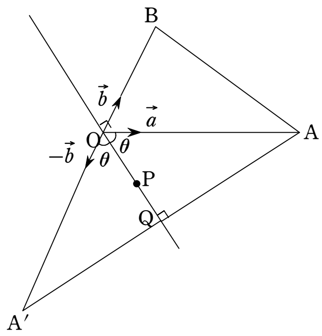
であるから，題意は示された。

【戦略２】

$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ という条件を

直線 OP が $\angle\mathrm{AOB}$ の外角の二等分線

と捉えると，



という図から，$\triangle\mathrm{OQA}\equiv\triangle\mathrm{OQA'}$ ということが分かります。

ここから，$\triangle\mathrm{ABA'}$ において点 M，Q がそれぞれ辺 AB，辺 AA′ の中点であると分かりますから，$\mathrm{MQ}/\!/\mathrm{BA'}$ を得て解決です。

さらにここから中点連結定理をインスピレーションできれば，⑵ も即座に解決です。

別解

⑴ $\vec{a}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ のなす角を θ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$，

また，$-\vec{b}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ のなす角を φ $\left(0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。

条件 $\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ から，$|\vec{a}|\,|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cos\theta=|-\vec{b}|\,|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cos\varphi$

$|\vec{a}|=|-\vec{b}|=1$ より，$\cos\theta=\cos\varphi$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ なので，$\theta=\varphi$ を得る。

さて，直線 OB，直線 AQ の交点を A′ とすると

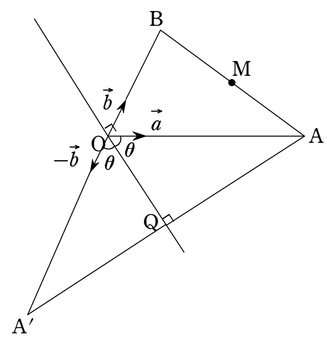
$$\triangle\mathrm{OQA}\equiv\triangle\mathrm{OQA'}\ \cdots(*)$$

（∵ 辺 OQ は共通辺で，1 辺とその両端の角が等しい）

よって，$\triangle\mathrm{ABA'}$ において，点 M，Q はそれぞれ辺 AB，AA′ の中点である。

これにより，$\mathrm{MQ}/\!/\mathrm{BA'}$ が言える。

ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{MQ}}/\!/\vec{b}$ であることが示された。



⑵ $\triangle\mathrm{ABA'}$ で中点連結定理から

$$\begin{aligned}\mathrm{MQ}&=\frac{1}{2}\mathrm{A'B}\\&=\frac{1}{2}(\mathrm{OA'}+\mathrm{OB})\\&=\frac{1}{2}(\mathrm{OA}+\mathrm{OB})\quad(\because(*))\end{aligned}$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{MQ}}|=\dfrac{1}{2}\left(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\right)$ となる。

【総括】

一見どう活用するのか分かりにくい $\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ という条件をどう料理するか。

その料理の仕方によって，美味しく仕上がったかどうかが分かれたのではないでしょうか。

内積＝0 の形を目指して，垂直を見出しにいくのか

外角の二等分線と捉えるか

様々なものの見方ができる気持ちの良い問題です。

また，ベクトルや幾何を相互横断的に見るための訓練としても本問はいい題材でしょう。