一つのサイコロを続けて投げて，最初の n 回に出た目の数をその順序のまま小数点以下に並べてできる実数を a_n とおく。例えば，出た目の数が 5，2，6，…… であれば，

$$a_1=0.5\ ,\ a_2=0.52\ ,\ a_3=0.526\ ,\ \cdots\cdots$$

である。実数 α に対して $a_n \leqq \alpha$ となる確率を $p_n(\alpha)$ とおく。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n\left(\frac{41}{333}\right)$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n(\alpha)=\frac{1}{2}$ となるのは α がどのような範囲にあるときか。

＜ '90 東京大 ＞

【戦略】

(1) は説明が難しい問題です。頭ではぼんやりとどういう現象が起きればよいのか分かるとは思いますが，それを紙面上に誤解なく表現するのは至難の業です。

$\dfrac{41}{333}=0.123123\cdots$ **なので**

事象 A ：サイコロを 2 回投げて，1 の目，1 の目が出る。
事象 B ：サイコロを 3 回投げて，1 の目，2 の目，1 または 2 の目が出る。
事象 C ：サイコロを 3 回投げて，1 の目，2 の目，3 の目が出る。

という 3 つの事象の設定の必要性に気がつきます。

事象 A，B が起こったら，残りは何が出ても OK です。
問題は事象 C が起こったときですが，事象 C は一旦「リセットされた」と思いましょう。
要するに 1，2，3 という目が出たら，スタートと同じ状況と見なしてしまうわけです。

(2) は洞察力と閃きが問われます。大小関係を扱う本問の趣旨，及び サイコロを投げるという操作において $\frac{1}{2}$ という数字の意味を考えると，

1 回目に 1，2，3 という目が出て，後は何でも可

この状況が $\frac{1}{2}$ です。

このことから，$0.3666\cdots=\dfrac{11}{30}$ という数字に辿り着くことになります。

この操作において，0，7，8，9 を用いる数字は作れませんから，この次の数字は $0.4111\cdots=\dfrac{37}{90}$ ということになります。

これは，1 回目に 1，2，3 という目が出て，後は何でも可 という状況に加え，「1 回目が 4 でそれ以降は全て 1 の目」という状況も加わりますが，サイコロを限りなく多く投げ続けて，全て 1 が出続けるというシチュエーションはほとんどありえません。

つまり "実質"，1 回目に 1，2，3 が出ないと，$\alpha \leqq 0.4111\cdots$ という事象はほとんど起きないわけです。このことから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n\left(\frac{37}{90}\right)=\frac{1}{2}$ であることになるわけです。

あとは $\alpha<\dfrac{11}{30}$，及び，$\alpha>\dfrac{37}{90}$ のときに $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n(\alpha)\neq\frac{1}{2}$ であることを言います。

$\alpha<0.3666\cdots$ のとき（例えば，$\alpha=0.365$ のとき）は，2 回目以降に出る目に制約が生じるため，残念ながら $\frac{1}{2}$ を下回ってしまいます。

$\alpha>0.4111\cdots$ のとき（例えば $\alpha=0.412$ のとき）は，2 回目以降に出る目の制約が緩くなるので，$\frac{1}{2}$ を上回ります。

$\dfrac{11}{30}\leqq\alpha\leqq\dfrac{37}{90}$ のときは，$p_n(\alpha)$ が α に関する広義単調増加関数ということを利用すればよいでしょう。

広義単調増加関数とは，$a<b$ に対して，$f(a)\leqq f(b)$ を満たす関数のことです。

$\dfrac{11}{30}\leqq\alpha\leqq\dfrac{37}{90}$ のとき，$p_n\left(\dfrac{11}{30}\right)\leqq p_n(\alpha)\leqq p_n\left(\dfrac{37}{90}\right)$ であり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n\left(\frac{11}{30}\right)=\frac{1}{2}$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n\left(\frac{37}{90}\right)=\frac{1}{2}$ なので，はさみうちの原理から $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n(\alpha)=\frac{1}{2}$ ということになります。

さすがに $p_n(\alpha)$ が α に関する広義単調増加関数ということは認めてもいいと思います。

解答

(1) $\dfrac{41}{333}=0.123123123\cdots=0.\dot{1}2\dot{3}$

$p_n\left(\dfrac{41}{333}\right)$ とは，$a_n\leqq\dfrac{41}{333}$ となる確率であり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n\left(\frac{41}{333}\right)$ とは $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n\leqq\frac{41}{333}$ となる確率

事象 A ：サイコロを 2 回投げて，1 の目，1 の目が出る。
事象 B ：サイコロを 3 回投げて，1 の目，2 の目，1 または 2 の目が出る。
事象 C ：サイコロを 3 回投げて，1 の目，2 の目，3 の目が出る。

とする。

今，$n\to\infty$ のときを考えるので，サイコロを十分な回数投げるときのことを考えればよい。

$P=\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n\left(\frac{41}{333}\right)$ とおき，P を考える際に起こるべき事象を D とすると，P は次の ①，②，③ のいずれかが起こる確率である。

① 最初の 2 回で事象 A が起こる
② 最初の 3 回で事象 B が起こる
③ 最初の 3 回で事象 C が起こり，かつそれ以降は事象 D が起こる

$$\begin{aligned}P&=\left(\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times1\right)+\left(\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times P\right)\\&=\frac{1}{36}+\frac{2}{216}+\frac{1}{216}P\\&=\frac{8}{216}+\frac{1}{216}P\end{aligned}$$

これより，$P=\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n\left(\frac{41}{333}\right)=\frac{8}{215}$ …答

(2)　$\alpha_1=0.3666\cdots=\dfrac{11}{30}$ とする。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}p_n(\alpha_1)$ とは，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n\leqq\alpha_1$ となる確率

すなわち，「1 回目に 1，2，3 で，2回目以降は何でも可」となる確率

$$\lim_{n\to\infty}p_n(\alpha_1)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ とすると，$\alpha<\alpha_1$ のときは2回目以降の目に制約が生じるため

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}p_n(\alpha)<\frac{1}{2}$ となってしまう。

一方，$\alpha_2=0.4111\cdots=\dfrac{37}{90}$ とする。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}p_n(\alpha_2)$ とは，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n\leqq\alpha_2$ となる確率

すなわち，$\left\{\begin{array}{l}\text{1回目に 1，2，3 で，2回目以降は何でもよい}\\ \qquad\qquad\text{または}\\ \text{1回目に 4 で，2回目以降は全て 1}\cdots(*)\end{array}\right.$ となる確率

$$\lim_{n\to\infty}p_n(\alpha_2)=\frac{3}{6}+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n=\frac{1}{2}$$

$\alpha>\alpha_2$ のときは(*)における2回目以降の制約が緩くなるので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}p_n(\alpha)>\frac{1}{2}$ となる。

$\dfrac{11}{30}\leqq\alpha\leqq\dfrac{37}{90}$ のときは，

$$p_n\left(\frac{11}{30}\right)\leqq p_n(\alpha)\leqq p_n\left(\frac{37}{90}\right)$$

が成り立つ。

$$\lim_{n\to\infty}p_n\left(\frac{11}{30}\right)=\frac{1}{2},\quad \lim_{n\to\infty}p_n\left(\frac{37}{90}\right)=\frac{1}{2}$$

なので，はさみうちの原理から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}p_n(\alpha)=\frac{1}{2}$

以上から，求める α の範囲は $\dfrac{11}{30}\leqq\alpha\leqq\dfrac{37}{90}$ …答

【総括】

サイコロの目を使って無限小数を作っていくというシンプルな設定ではありますが，完答は至難の業でしょう。

(1) は答えを出すというよりも，頭の中の構想を紙面に落とし込むことの方が難しいと思います。

そして，厳密には 解答 中の 「$P=\displaystyle\lim_{n\to\infty}p_n\left(\frac{41}{333}\right)$ とおく」というのは，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}p_n\left(\frac{41}{333}\right)$ が収束するということを前提にしないといけない話ですが，収束性は暗黙の了解で使ってしまいました。

※ 数列 $p_1(\alpha)$，$p_2(\alpha)$，… は下に有界な単調減少数列なので収束しますが，このあたりの厳密性は高校数学の範囲では深く突っ込むと収拾がつかなくなると判断しました。ご了承ください。

(2) も機械的な態度でどうにかなる類の問題ではありません。

今回の $\dfrac{11}{30}$（$=0.3666\cdots$），$\dfrac{37}{90}$（$=0.4111\cdots$）という数字は

実験，観察，試行錯誤，直感

などから辿り着けるもので，理論やマニュアル的な態度で辿り着ける数字ではないでしょう。

そして，その後の議論もかなり ”アバウト” な議論です。

解答では，$p_n(\alpha)$ が α に関する広義単調増加関数であることを暗黙の了解として使ってしまいました。

ここの周辺の議論に厳密性をもたせると，解答が冗長になってしまい，締まりがなくなってしまうと考えて，ここでは厳密性を捨てて解答を書きました。
ご了承ください。