カードの番号の積

　1から9までの番号をつけた9枚のカードがある。このなかから無作為に4枚のカードを同時に取り出し，カードに書かれた4つの番号の積を X とおく。

(1)　X が5の倍数になる確率を求めよ。

(2)　X が12の倍数になる確率を求めよ。

(3)　X が平方数になる確率を求めよ。ただし，X が平方数であるとは，ある自然数 n を用いて $X=n^2$ と表されることである。

＜ '09 千葉大 ＞

【戦略】

(1)　**X が5の倍数とは，取り出した4枚のカードの中に5のカードが入っていることです。したがって，5以外の残り3枚のカードの選び方を考えればよいことになります。**

(2)　**まずは X が12の倍数とは**

X が3の倍数　かつ　X が4の倍数

と見たいところです。

次に X が3の倍数であるとは

4枚の中に少なくとも1枚3の倍数のカードが含まれる

ということになりますが，「少なくとも1枚」ということを直接考えることは面倒です。
ここは自然に余事象を考える方針に向かいたいところです。

その際，4の倍数でないケースを考えることにもなりますが
4の倍数でないときは少し注意が必要で
4，8 のカードを取らないだけでなく，2，6のカードを同時に取らないということも考えなければいけません。

(3)　**X が平方数とは**

$$X=2^{偶数}\cdot 3^{偶数}\cdot 5^{偶数}\cdot 7^{偶数}$$

ということです。

このうち，素因数5，7のカードは1枚ずつしかないことを考えると5，7のカードは1枚でも含まれていたらアウトです。

したがって，1，2，3，4，6，8，9 のカードで考えます。
これらの数字の中で，「1，4，9」という元々が平方数であるカードは，含まれていても X が平方数かどうかに影響を与えません。
1は分かりやすいですね。
また，4をかけても $2^{◎+2}$ となるだけで，素因数2の指数の偶奇に影響を与えません。
9についても同様に素因数3の指数の偶奇に影響を与えません。

そこで，$\begin{cases}1,\ 4,\ 9\\ 2,\ 3,\ 6,\ 8\end{cases}$ という2つのグループに分け，平方数グループから何枚取り出すかで場合分けするのがスマートです。

解答

(1)　取り出し方の総数は ${}_9C_4=\dfrac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=126$【通り】

これらは同様に確からしい。

このうち，X が5の倍数となる取り出し方を考える。

4枚の中に5のカードが入っていればよく，残り3枚は何でもよい。

したがって，${}_8C_3=\dfrac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}=56$【通り】が X が5の倍数になるような取り出し方である。

求める確率は $\dfrac{56}{126}=\dfrac{4}{9}$ …答

(2)　X が3の倍数である事象を A，X が4の倍数である事象を B とする。

求める確率は $P(A\cap B)$ である。

$$\begin{aligned}P(A\cap B)&=1-P(\overline{A\cap B})\\&=1-P(\overline{A}\cup\overline{B})\ (\because\ \text{ド・モルガンの法則})\\&=1-\{P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A}\cap\overline{B})\}\ \cdots①\end{aligned}$$

$\overline{A}$ とは

1，2，4，5，7，8 から4枚取り出す

という事象で，$P(\overline{A})=\dfrac{{}_6C_4}{{}_9C_4}=\dfrac{5}{42}$

$\overline{B}$ とは

1，2，3，5，6，7，9 から4枚取り出すが，
2，6は同時に取り出さない

という事象で，$P(\overline{B})=\dfrac{{}_7C_4-{}_5C_2}{{}_9C_4}=\dfrac{25}{126}$

2，6，○，○
ここの決め方が ${}_5C_2$ 通り

$\overline{A}\cap\overline{B}$ とは

1，2，5，7 から4枚取り出す

という事象で，$P(\overline{A}\cap\overline{B})=\dfrac{1}{{}_9C_4}=\dfrac{1}{126}$

これらを ① に代入して

$$\begin{aligned}P(A\cap B)&=1-\left(\frac{5}{42}+\frac{25}{126}-\frac{1}{126}\right)\\&=\frac{29}{42}\ \cdots答\end{aligned}$$

(3)　5，7のカードを取り出してしまうと，X は平方数になり得ない。

そこで，

$$S=\{1,\ 4,\ 9\}$$
$$T=\{2,\ 3,\ 6,\ 8\}$$

という集合を考える。

(i)　S から3枚取り出すとき

T から残り1枚何を取り出しても X は平方数にならない。

(ii)　S から2枚取り出すとき(その取り出し方は ${}_3C_2$ 通り)

T からは2，8という組で取り出せば X は平方数となる。

$\therefore\ {}_3C_2\times1=3$【通り】

(iii)　S から 1 枚取り出すとき (その取り出し方は ${}_3\mathrm{C}_1$ 通り)

T からは $\begin{cases} 2,\ 3,\ 6 \\ \text{または} \\ 3,\ 6,\ 8 \end{cases}$ という組で取り出せば X は平方数となる。

$\therefore\ {}_3\mathrm{C}_1\times 2=6$ 【通り】

(iv)　S から取り出さないとき

$$\begin{aligned} X&=2\cdot 3\cdot 6\cdot 8 \\ &=2^5\cdot 3^2 \\ &\neq(\text{平方数}) \end{aligned}$$

(i), (ii), (iii), (iv) より，X が平方数となるのは

$$3+6=9 \text{ 【通り】}$$

したがって，求める確率は $\dfrac{9}{{}_9\mathrm{C}_4}=\dfrac{1}{14}$ …答

【総括】

番号付きのカードや玉を取り出したり，サイコロを何回か投げたりして，出た数字の和や積を考える問題は頻出です。

まずは基本的な倍数判定についてはできるようにしましょう。

今回は積でしたから，3 の倍数や 4 の倍数が含まれるか否かという比較的単純な話でしたが，

3の倍数 … 各桁の数字の和が 3 の倍数

4の倍数 … 下２桁が４の倍数

ぐらいは身につけておきたいところです。

その他にも

8の倍数 … 下３桁が８の倍数

9の倍数 … 各位の数字の和が９の倍数

も常識にしておき，状況に応じて使えるようにしておきましょう。

また，例えば和が3の倍数となるときを考えるときは，出てくる数字を

・３で割り切れる数のグループ

・３で割って１余る数のグループ

・３で割って２余る数のグループ

に分けて考えます。これもよくやる手法です。

(3) は (1)，(2) ほどメジャーなタイプではありませんから，その場での対応力が問われたことでしょう。

X が平方数ということを $X=2^{\text{偶数}}\cdot 3^{\text{偶数}}\cdot 5^{\text{偶数}}\cdot 7^{\text{偶数}}$

というように「指数部分がすべて偶数」と見ることができると，直感に頼らずともスムーズに探せると思います。